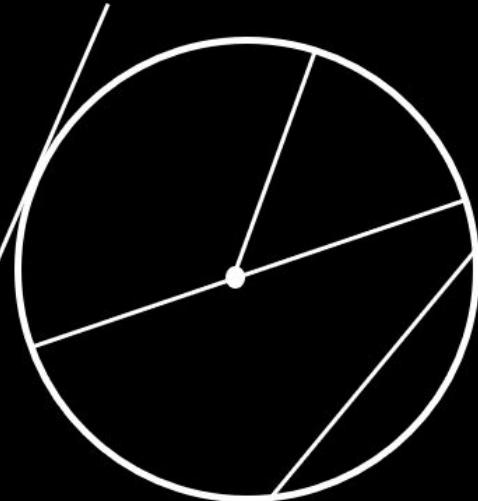


ตัวอย่างเอกสารประกอบการเรียน

กบกบ

π



วงกลม

คลังความรู้ Exam & Material Online

เอกสารตัวเต็มมีจำนวน 108 หน้า

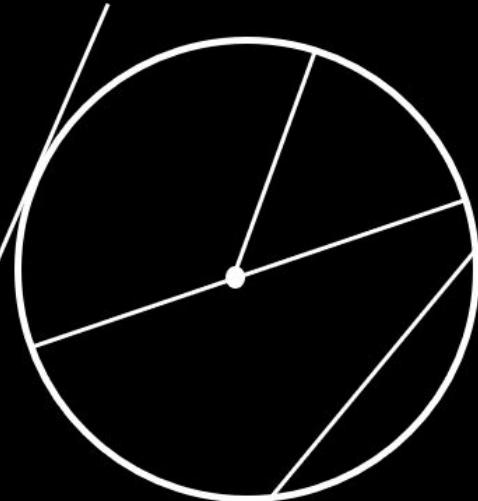
เนื้อหาพร้อมแบบฝึกหัดกว่า 300 ข้อ

ajnunu.com

ตัวอย่างเอกสารประกอบการเรียน

กบกบ

π



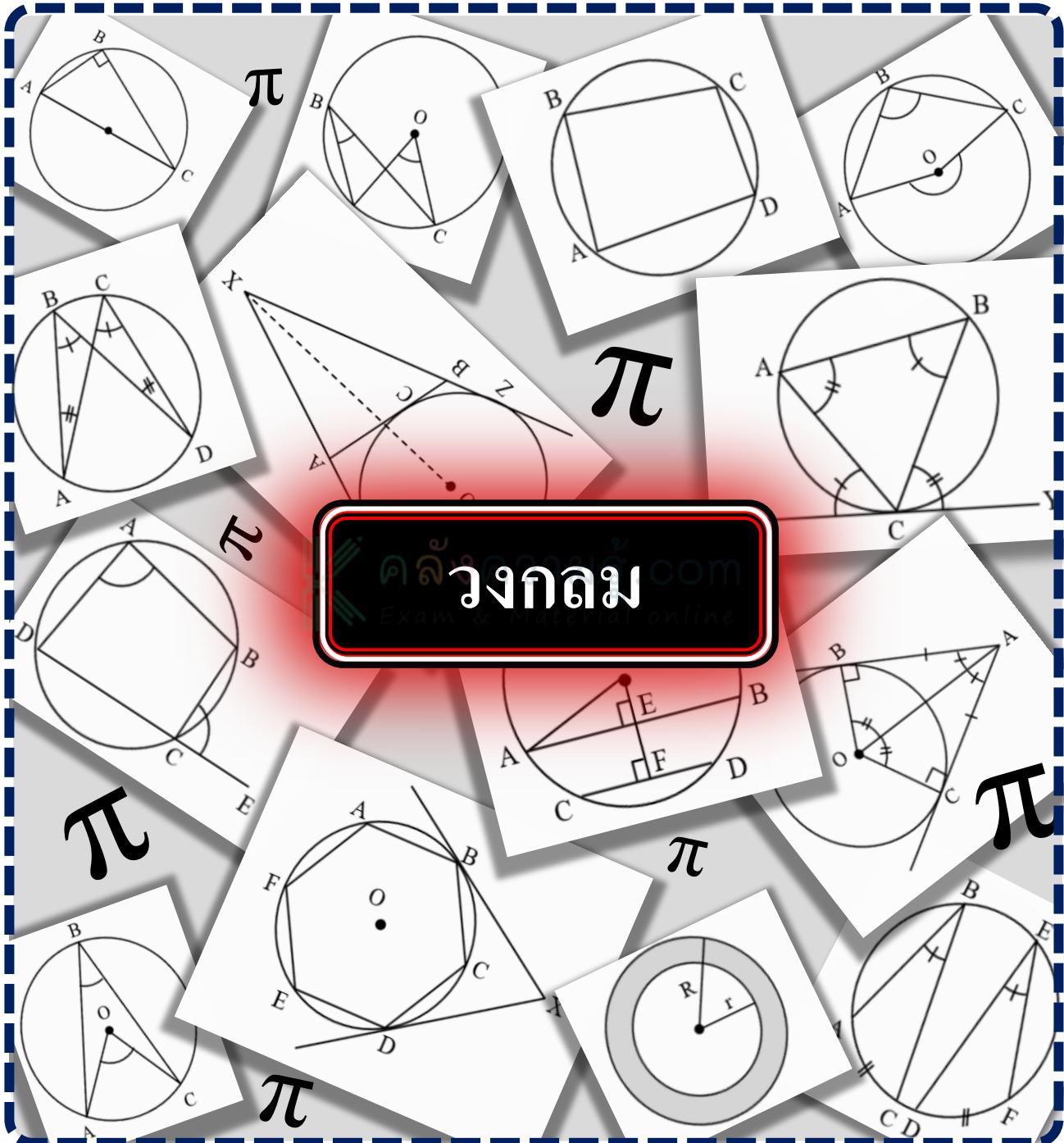
วงกลม

คลังความรู้ Exam & Material Online

เอกสารตัวเต็มมีจำนวน 108 หน้า

เนื้อหาพร้อมแบบฝึกหัดกว่า 300 ข้อ

ajnunu.com



เอกสารนี้เผยแพร่ที่: ajnunu.com

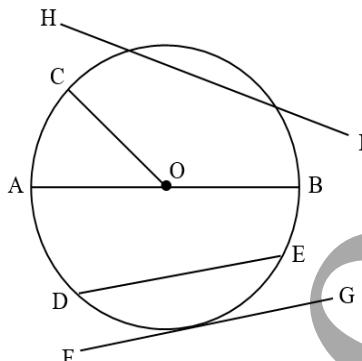
ข้อกำหนดในการใช้เอกสาร: เอกสารประกอบการเรียนนี้เป็นผลงานการเรียบเรียงของ อ.วิษณุ วงศ์ธรรมสิริ ซึ่งได้รับความคุ้มครองตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ ผู้ที่ต้องการเผยแพร่ส่วนหนึ่งส่วนใดของเอกสารนี้ หรือใช้เอกสารนี้ในการประกอบการสอน ต้องได้รับการยินยอมเป็นลายลักษณ์อักษรก่อนเท่านั้น

สารบัญ

หัวข้อ	หน้า
ความหมายของวงกลมและส่วนประกอบ	1
คุณสมบัติที่ 1 และ แบบฝึกหัดที่ 1	2
คุณสมบัติที่ 2 และ แบบฝึกหัดที่ 2	5
คุณสมบัติที่ 3 และ แบบฝึกหัดที่ 3	15
คุณสมบัติที่ 4 และ แบบฝึกหัดที่ 4	25
คุณสมบัติที่ 5 และ แบบฝึกหัดที่ 5	33
คุณสมบัติที่ 6 และ แบบฝึกหัดที่ 6	40
คุณสมบัติที่ 7 และ แบบฝึกหัดที่ 7	55
คุณสมบัติที่ 8 และ แบบฝึกหัดที่ 8	77
คุณสมบัติที่ 9 และ แบบฝึกหัดที่ 9	90
คุณสมบัติที่ 10 และ แบบฝึกหัดที่ 10	96

วงกลม

วงกลม คือ รูปที่ประกอบด้วยจุดทุกจุดที่อยู่ห่างจากจุดคงที่ๆ 叫做ศูนย์กลาง 叫做เส้นผ่านศูนย์กลาง 叫做เส้นรอบวง 叫做รัศมี 叫做ด้าน 叫做ค่าคงที่ของวงกลม



ส่วนประกอบของวงกลม

- จุดศูนย์กลาง คือ จุดคงที่ซึ่งอยู่ภายในวงกลมซึ่งอยู่ห่างจากจุดทุกจุดที่ประกอบเป็นวงกลม เป็นระยะทางเท่าๆ กันบนระนาบเดียวกัน (จุดศูนย์กลางยังใช้เป็นชื่อเรียกของวงกลมนั้นๆ ด้วย)

จากรูป จุด O คือ จุดศูนย์กลางของวงกลม O

- รัศมี คือ ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดบนเส้นรอบวง

จากรูป OA , OB , OC คือ รัศมีของวงกลม O

หมายเหตุ

- วงกลม 1 วง มีรัศมีมากมายนับไม่ถ้วน
- รัศมีของวงกลมเดียวกันย่อมยาวเท่ากัน
- วงกลมใดๆ ที่มีรัศมียาวเท่ากัน ข้อมูลนัดเท่ากัน กล่าวคือสามารถทับกันได้สนิท

- เส้นผ่านศูนย์กลาง คือ ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดหนึ่งบนเส้นรอบวง

จากรูป AB คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

หมายเหตุ

- วงกลม 1 วง มีเส้นผ่านศูนย์กลางมากมายนับไม่ถ้วน
- เส้นผ่านศูนย์กลาง 1 เส้น มีความยาวเท่ากับความยาวของรัศมี 2 เส้น

- คอร์ด คือ ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งสองอยู่บนวงกลมเดียวกัน คอร์ดแต่ละเส้นจะแบ่งส่วนโถงของวงกลมออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนโถงใหญ่ กับ ส่วนโถงน้อย

จากรูป DE คือ คอร์ดของวงกลม O

หมายเหตุ

- คอร์ดที่ยาวที่สุดของวงกลม叫做เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และแบ่งวงกลมออกเป็น 2 ส่วนโถง 2 ส่วนที่เท่ากัน กล่าวคือ ครึ่งวงกลม

5) เส้นสัมผัสวงกลม กือ ส่วนของเส้นตรงที่ตัดวงกลมเพียงจุดเดียว

จากรูป

\overline{FG} กือ เส้นสัมผัสของวงกลม O

6) เส้นพาดวง กือ ส่วนของเส้นตรงที่ลากผ่านวงกลมและตัดวงกลม 2 จุด

จากรูป

\overline{HI} กือ เส้นพาดวงของวงกลม O

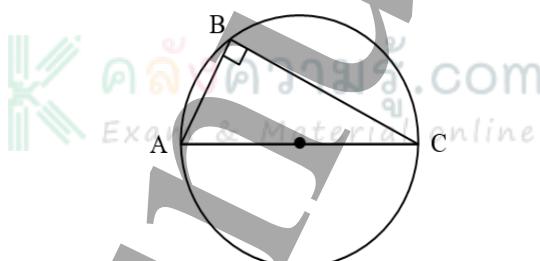
7) ส่วนโค้งของวงกลม

ยกตัวอย่างจากรูป

ส่วนโค้ง AC เปียนแทนด้วยสัญลักษณ์ว่า \widehat{AC}
ความยาวส่วนโค้ง เปียนแทนด้วยสัญลักษณ์ว่า $m(\widehat{AC})$

คุณสมบัติต่างๆ ของวงกลม

คุณสมบัติที่ 1 มุมภายในครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับ 90° องศา

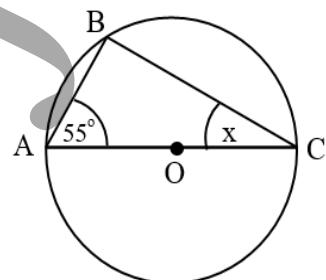


$$\widehat{ABC} = 90^\circ$$

แบบฝึกหัดที่ 1

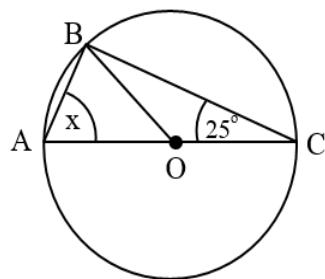
1) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 25°
- ข) 30°
- ค) 35°
- ง) 40°



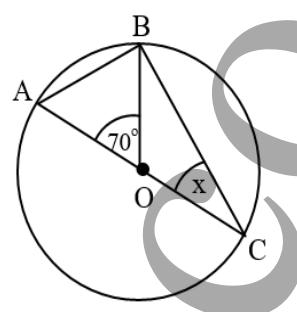
2) ຈາກຮູບ ຈົງທາຄ່າ x

- Ⓐ) 50°
- Ⓑ) 55°
- Ⓒ) 60°
- Ⓓ) 65°



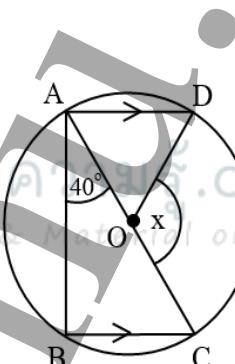
3) ຈາກຮູບ ຈົງທາຄ່າ x

- Ⓐ) 35°
- Ⓑ) 30°
- Ⓒ) 25°
- Ⓓ) 20°



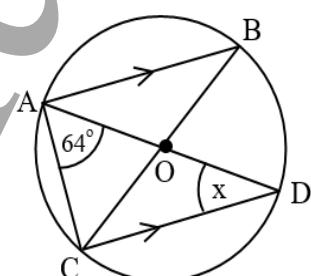
4) ຈາກຮູບ ຈົງທາຄ່າ x

- Ⓐ) 85°
- Ⓑ) 100°
- Ⓒ) 105°
- Ⓓ) 110°



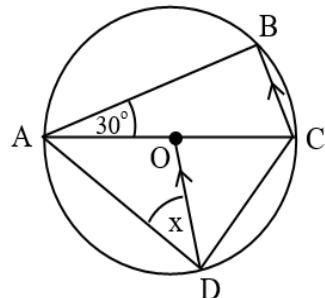
5) ຈາກຮູບ ຈົງທາຄ່າ x

- Ⓐ) 24°
- Ⓑ) 25°
- Ⓒ) 26°
- Ⓓ) 28°



6) ຈາກຮູບ ຈົງທາຄ່າ x

- Ⓐ) 30°
- Ⓑ) 32°
- Ⓒ) 35°
- Ⓓ) 40°

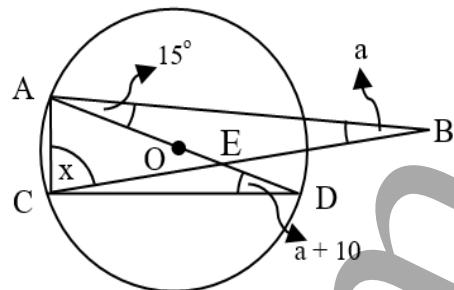


ajinul.com

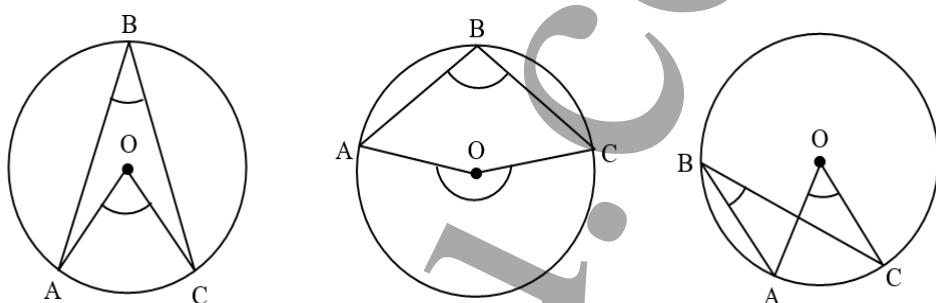
หน้า 4
มีในเอกสารตัวเต็ม

12) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 85°
- ข) 88°
- ค) 90°
- ง) 92°



คุณสมบัติที่ 2 มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็น 2 เท่าของขนาดมุมในส่วนโถงของวงกลม ซึ่งรองรับด้วยส่วนโถงเดียวกัน



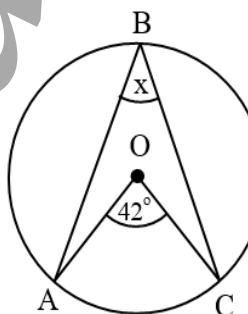
$$\angle AOC = 2 \angle ABC$$

แบบฝึกหัดที่ 2

◎ ตอนที่ 1

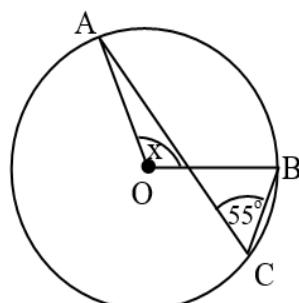
1) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 21°
- ข) 42°
- ค) 44°
- ง) 84°



2) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 22.5°
- ข) 55°
- ค) 100°
- ง) 110°

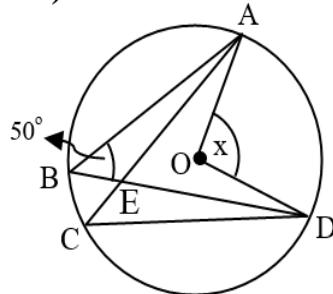


ajinul.com

หน้า 6-7
มีในเอกสารตัวเต็ม

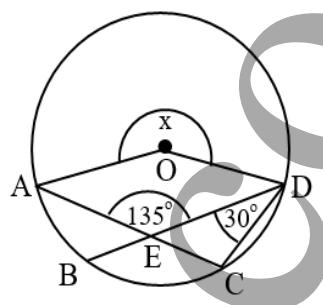
13) จากรูป จงหาค่า x (スマกมคณิตฯ)

- ก) 95°
- ข) 100°
- ค) 105°
- ง) 110°



14) จากรูป จงหาค่า x

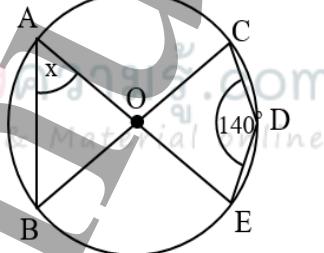
- ก) 210°
- ข) 200°
- ค) 195°
- ง) 190°



15) จากรูป จงหาค่า x เมื่อ \overline{AE} , \overline{BC} เป็นเส้นผ่าน

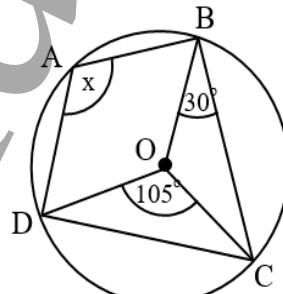
จุดศูนย์กลาง

- ก) 70°
- ข) 65°
- ค) 60°
- ง) 50°



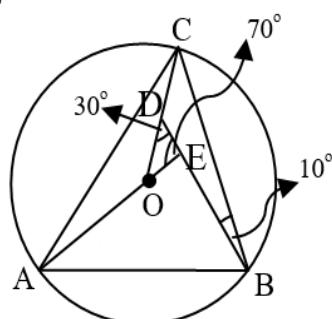
16) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 120°
- ข) 118.5°
- ค) 112.5°
- ง) 110°



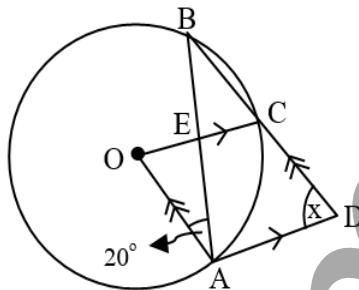
17) จากรูป จงหาค่า BAC (แนวตั้งรีบยมอุดม)

- ก) 45°
- ข) 55°
- ค) 60°
- ง) 70°



18) จากรูป จงหาค่า x

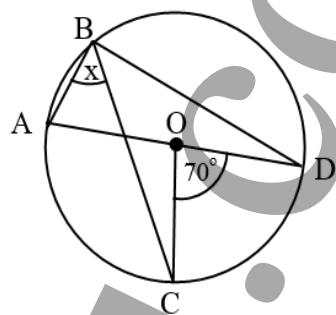
- Ⓐ) 20°
- Ⓑ) 30°
- Ⓒ) 40°
- Ⓓ) 50°



◎ ตอนที่ 2

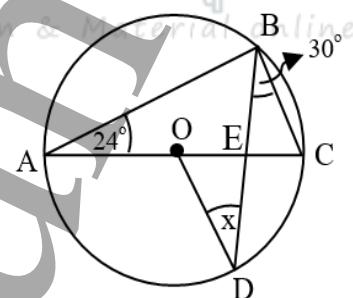
1) จากรูป จงหาค่า x

- Ⓐ) 55°
- Ⓑ) 45°
- Ⓒ) 40°
- Ⓓ) 35°



2) จากรูป จงหาค่า x

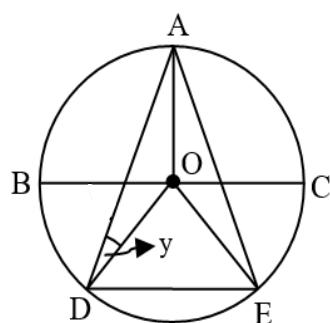
- Ⓐ) 24°
- Ⓑ) 36°
- Ⓒ) 40°
- Ⓓ) 44°



3) จากรูป $\overline{AD} = \overline{AE}$, $D\hat{O}E = 80^\circ$, \overline{BC} เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง จงหาค่า y

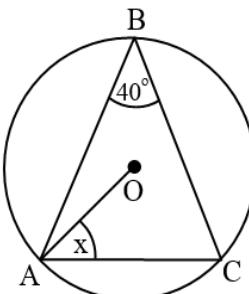
(แนวตัวอย่าง)

- Ⓐ) 40°
- Ⓑ) 30°
- Ⓒ) 20°
- Ⓓ) 10°



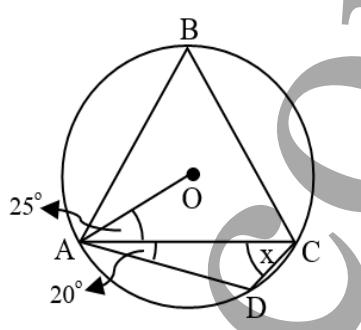
4) จากรูป จงหาค่า x

- (๙) 35°
- (๑๐) 40°
- (๑๑) 45°
- (๑๒) 50°



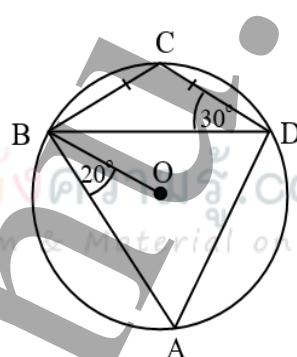
5) จากรูป จงหาค่า x

- (๙) 55°
- (๑๐) 45°
- (๑๑) 35°
- (๑๒) 20°



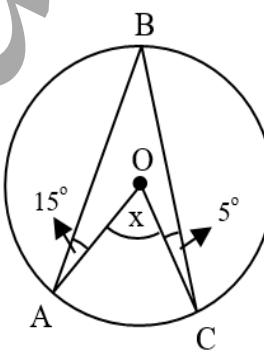
6) จากรูป จงหาค่ามุม ABC
(แนวคิดรีบยนหน้า)

- (๙) 50°
- (๑๐) 60°
- (๑๑) 70°
- (๑๒) 80°



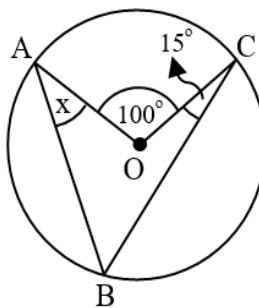
7) จากรูป จงหาค่า x

- (๙) 40°
- (๑๐) 35°
- (๑๑) 30°
- (๑๒) 25°



8) จากรูป จงหาค่า x

- (๙) 40°
- (๑๐) 35°
- (๑๑) 30°
- (๑๒) 25°



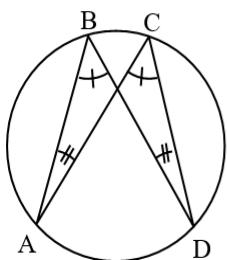
ajinun.com

หน้า 11 - 14
มีในเอกสารตัวเต็ม

ajinun.com
Exam & Material online

คุณสมบัติที่ 3

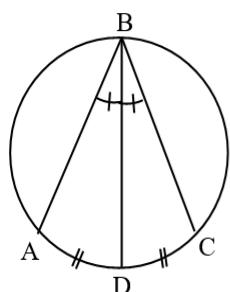
มุมที่เส้นรอบวงของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันหรือมีความยาวของส่วนโค้งเท่ากัน
จะมีขนาดเท่ากัน



\widehat{ABD} กับ \widehat{ACD} เป็นมุมที่เส้นรอบวงที่มี \widehat{AD} รองรับ

จะได้;

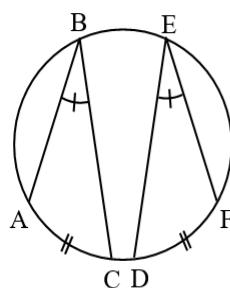
$$\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$$



\widehat{BAC} กับ \widehat{BDC} เป็นมุมที่เส้นรอบวงที่มี \widehat{BC} รองรับ

จะได้;

$$\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$$



\widehat{ABD} กับ \widehat{DBC} เป็นมุมที่เส้นรอบวงที่รองรับด้วย

\widehat{AD} กับ \widehat{DC} ที่มีความยาวเท่ากัน

จะได้;

$$\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$$

\widehat{ABC} กับ \widehat{DEF} เป็นมุมที่เส้นรอบวงที่รองรับด้วย

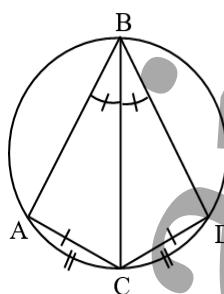
\widehat{AD} กับ \widehat{DF} ที่มีความยาวเท่ากัน

จะได้;

$$\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$$

เพิ่มเติม

- 1) มุมที่เส้นรอบวงที่มีส่วนโค้งรองรับมุมยาวเท่ากัน
เมื่อถูกคอร์ดจากปลายมุมด้านหนึ่งไปยังปลายมุม
อีกด้านหนึ่งคอร์ดจะยาวเท่ากัน

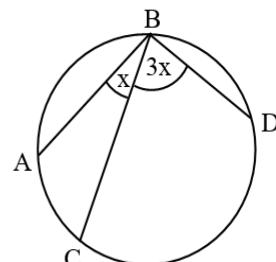


$$\overline{AC} = \overline{CD}$$



$$\overline{AC} = \overline{DF}$$

- 2) จากตัวอย่างข้างล่าง กำหนดให้ $m(\widehat{CD})$ ยาวเป็น 3 เท่า
ของ $m(\widehat{AC})$



จะได้;

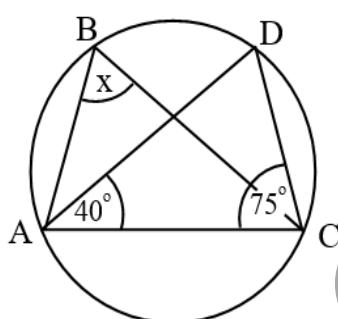
$$\widehat{CBD} = 3(\widehat{ABC})$$

แบบฝึกหัดที่ 3

◎ ตอนที่ 1

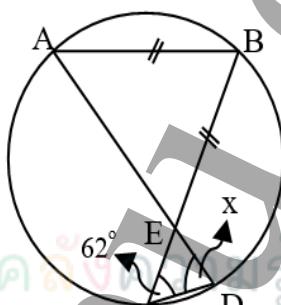
1) จากรูป จงหาค่า x

- (ก) 55°
- (ข) 65°
- (ค) 70°
- (ง) 75°



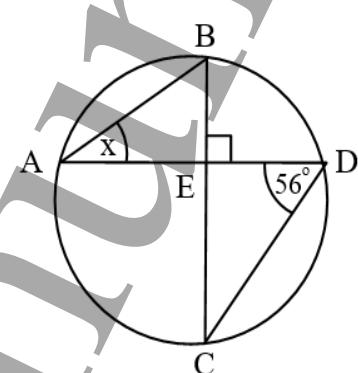
2) จากรูป กำหนดให้ $\overline{AB} = \overline{BE}$ จงหาค่า x

- (ก) 60°
- (ข) 56°
- (ค) 48°
- (ง) 44°



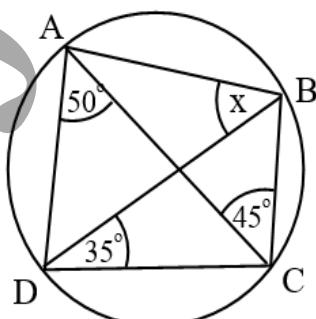
3) จากรูป จงหาค่า x

- (ก) 64°
- (ข) 56°
- (ค) 42°
- (ง) 34°



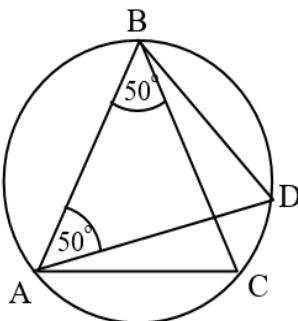
4) จากรูป จงหาค่า x

- (ก) 40°
- (ข) 35°
- (ค) 45°
- (ง) 50°



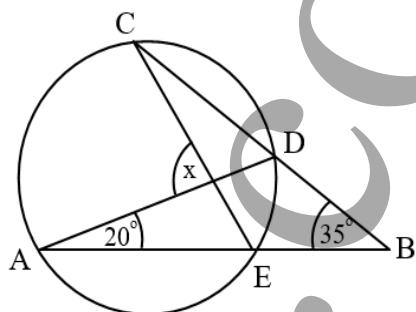
5) จากรูป ให้ $\overline{AB} = \overline{BC}$ งหาค่า $A\hat{D}B$

- ก) 40°
- ข) 45°
- ค) 55°
- ง) 65°



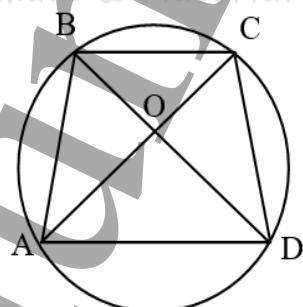
6) จากรูป งหาค่า x

- ก) 55°
- ข) 60°
- ค) 75°
- ง) 80°



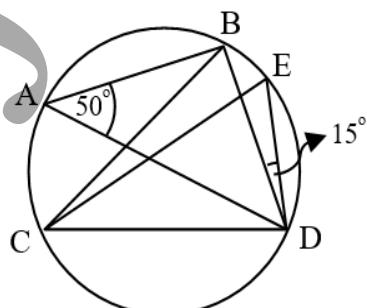
7) กำหนดให้ $A\hat{C}D = 70^\circ$, $C\hat{D}A = 60^\circ$, $D\hat{A}B = 80^\circ$ งหา $A\hat{O}D$ กางกืองค่า (แนวต่อรีบมหการ)

- ก) 100°
- ข) 105°
- ค) 110°
- ง) 115°



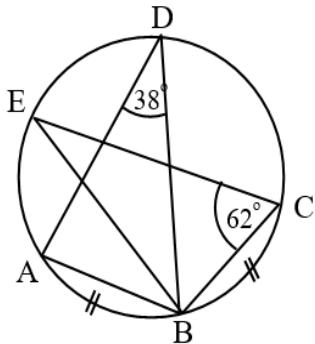
8) จากรูป งหาค่าของ $E\hat{C}D$

- ก) 25°
- ข) 30°
- ค) 35°
- ง) 40°



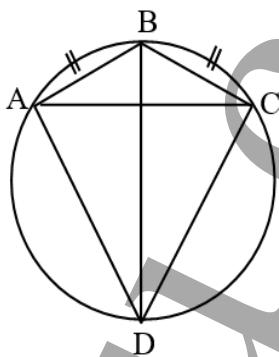
9) หาค่าของ $\angle EBC$

- (ก) 70°
- (ข) 76°
- (ค) 80°
- (ง) 84°



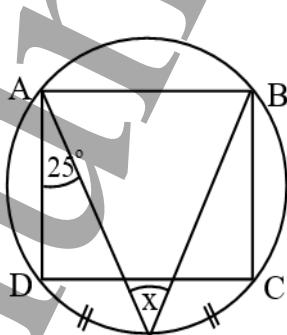
10) $\angle ADC = 64^\circ$ หาค่า $\angle ABC$

- (ก) 104°
- (ข) 112°
- (ค) 116°
- (ง) 120°



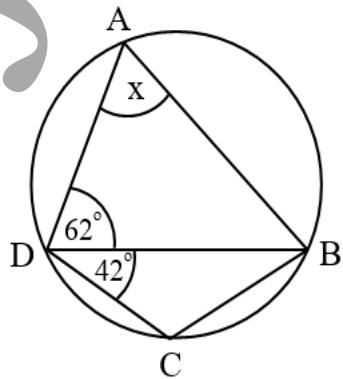
11) ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า หาค่าของ x

- (ก) 40°
- (ข) 45°
- (ค) 50°
- (ง) 55°



12) กำหนดให้ $\overline{AD} = \overline{BC}$ หาค่า x

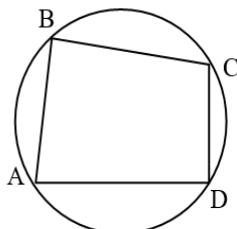
- (ก) 64°
- (ข) 76°
- (ค) 84°
- (ง) 104°



ajinul.com

หน้า 19-24
มีในเอกสารตัวเต็ม

คุณสมบัติที่ 4 สี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลม โดยที่มุมทั้งสี่ของสี่เหลี่ยม ต้องอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม มุมตรงข้ามของสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมรวมกันได้ 180° องศา



จากรูป

$$\hat{A}BC + \hat{ADC} = 180^\circ$$

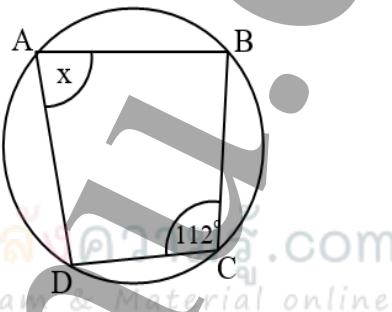
$$\hat{BAD} + \hat{BCD} = 180^\circ$$

แบบฝึกหัดที่ 4

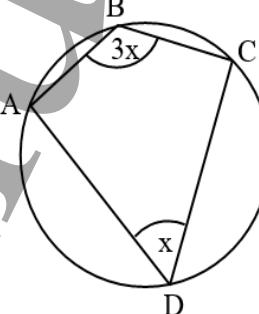
◎ ตอนที่ 1

1) จากรูป จงหาค่า x

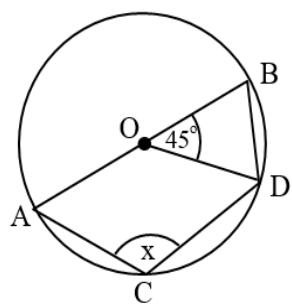
- ก) 58°
- ข) 68°
- ค) 70°
- ง) 78°

2) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 35°
- ข) 40°
- ค) 45°
- ง) 50°

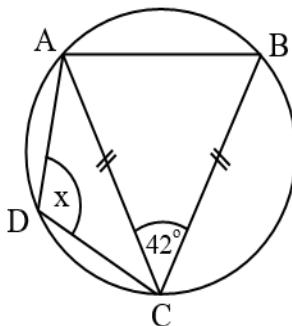
3) จากรูป จงหาค่า x (AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง)

- ก) 110°
- ข) 112.5°
- ค) 114.25°
- ง) 116°



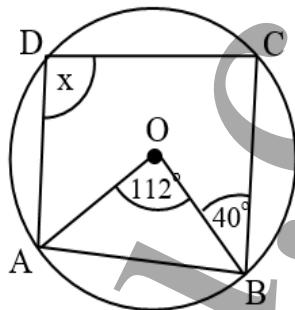
4) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 111°
- ข) 112°
- ค) 113°
- ง) 114°



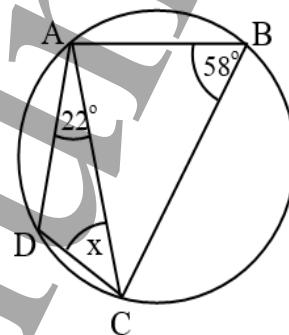
5) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 74°
- ข) 88°
- ค) 106°
- ง) 110°



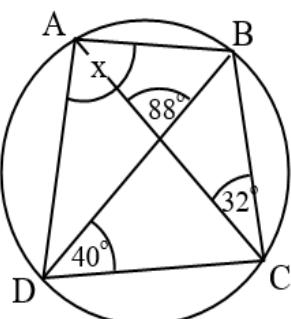
6) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 34°
- ข) 36°
- ค) 42°
- ง) 48°



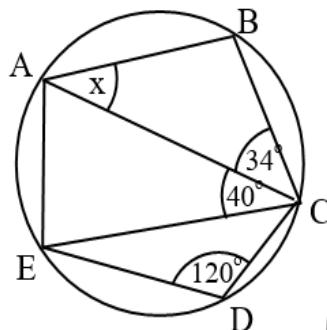
7) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 84°
- ข) 88°
- ค) 94°
- ง) 96°



8) ការរួម ងារការ x (សមាគមគណិត)

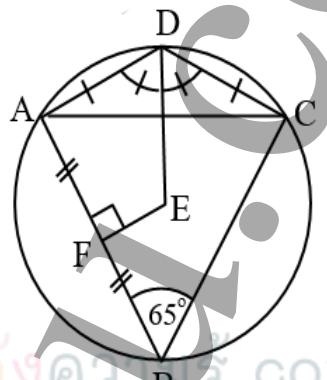
- ii) 56°
 iii) 46°
 iv) 40°
 v) 27°



9) jika $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{DA} = \overline{DC}$ unga D \hat{E} F

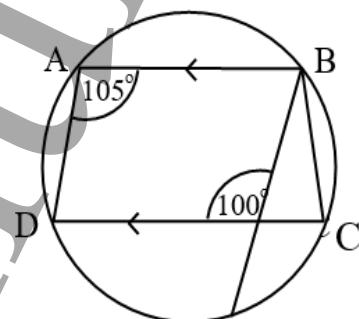
(ສາມາຄນຄລິດ ۱)

- Ⓐ) 120°
 - Ⓑ) 130°
 - Ⓒ) 140°
 - Ⓓ) 150°



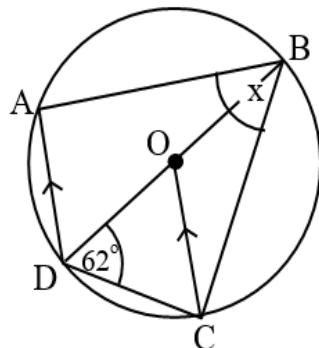
10) จารูป งหาค่าของ $A^{\frac{1}{2}}$

- Ⓐ) 100°
Ⓑ) 105°
Ⓒ) 110°
Ⓓ) 115°



11) จำกัดปัจจุบันของห้าค่า x

- ñ) 60°
v) 62°
ñ) 64°
v) 68°

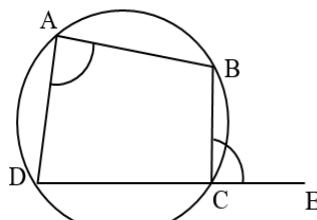


ajinul.com

หน้า 28 - 32
มีในเอกสารตัวเต็ม

คุณสมบัติที่ 5

ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของเส้นเหลี่ยมที่แนบในวงกลมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะเท่ากับมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามกัน



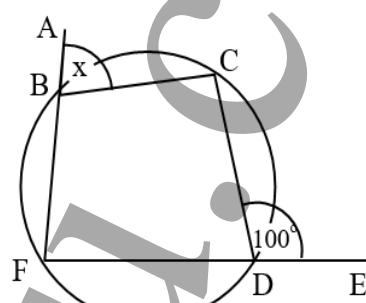
จากรูป

$$\hat{BCE} = \hat{DAB}$$

แบบฝึกหัดที่ 5

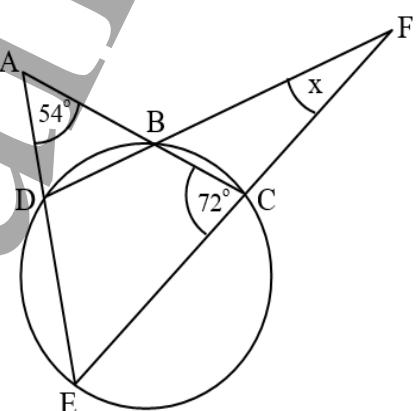
1) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 100°
- ข) 90°
- ค) 80°
- ง) 70°



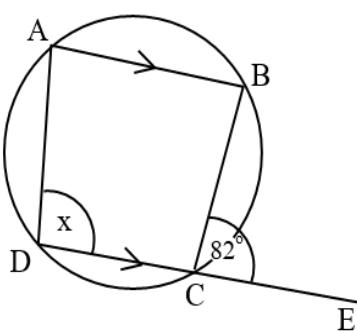
2) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 22°
- ข) 20°
- ค) 18°
- ง) 16°



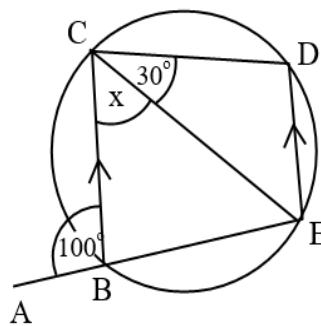
3) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 82°
- ข) 98°
- ค) 100°
- ง) 102°



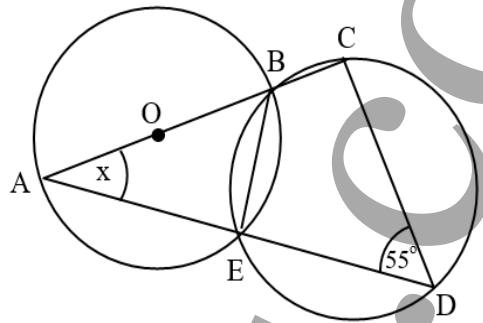
4) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 50°
- ข) 55°
- ค) 60°
- ง) 80°



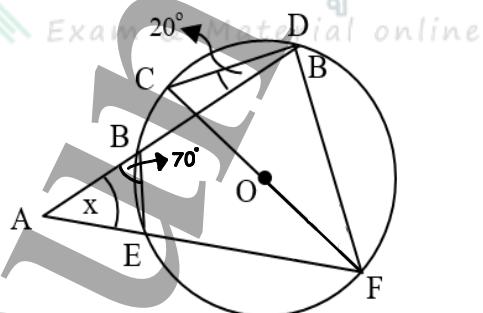
5) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 55°
- ข) 40°
- ค) 45°
- ง) 35°



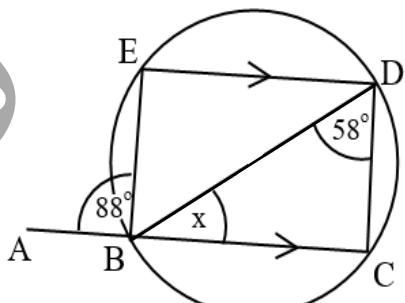
6) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 20°
- ข) 30°
- ค) 35°
- ง) 40°



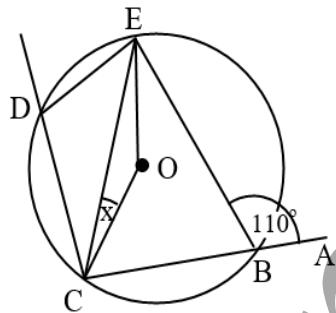
7) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 28°
- ข) 30°
- ค) 44°
- ง) 46°



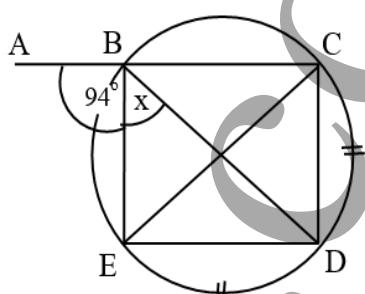
8) จากรูป จงหาค่า x

- Ⓐ) 10°
- Ⓑ) 15°
- Ⓒ) 20°
- Ⓓ) 30°



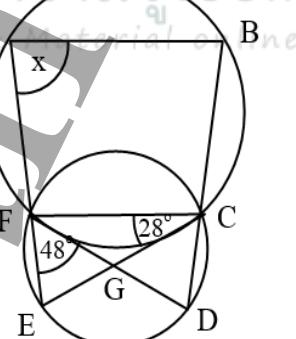
9) จากรูป จงหาค่า x

- Ⓐ) 43°
- Ⓑ) 46°
- Ⓒ) 47°
- Ⓓ) 52°

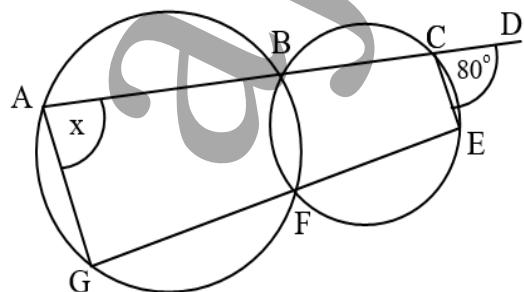


10) จากรูป จงหาค่า x

- Ⓐ) 76°
- Ⓑ) 84°
- Ⓒ) 98°
- Ⓓ) 104°



11) จากรูป จงหาค่า x



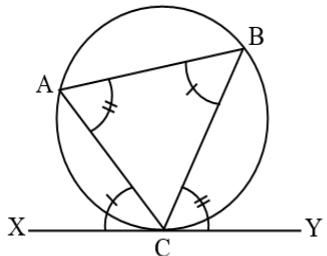
- Ⓐ) 100°
- Ⓑ) 90°
- Ⓒ) 80°
- Ⓓ) 75°

ajinul.com

หน้า 36 - 39
มีในเอกสารตัวเต็ม

คุณสมบัติที่ 6

มุมที่เกิดระหว่างเส้นสัมผัสกับคอร์ดที่จุดสัมผัส จะเท่ากับมุมในล่วงโถงของวงกลมที่อยู่ตรงข้าม



จากรูป

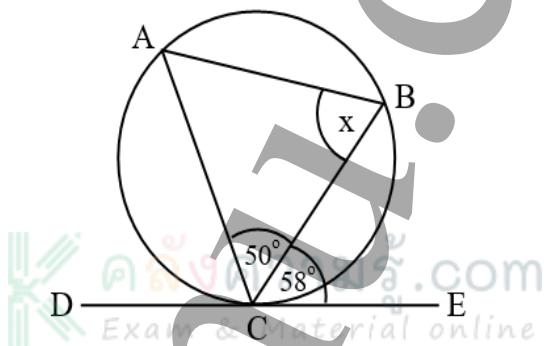
$$\hat{XCA} = \hat{ABC}$$

$$\hat{YCB} = \hat{BAC}$$

แบบฝึกหัดที่ 6**◎ ตอนที่ 1**

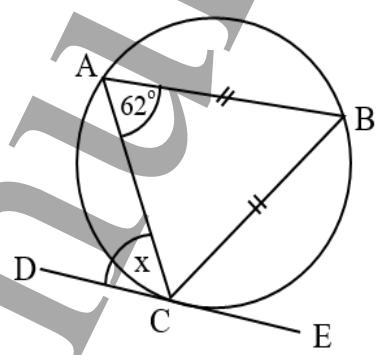
1) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 58°
- ข) 64°
- ค) 68°
- ง) 72°



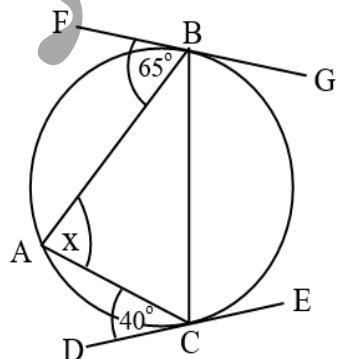
2) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 68°
- ข) 62°
- ค) 60°
- ง) 56°



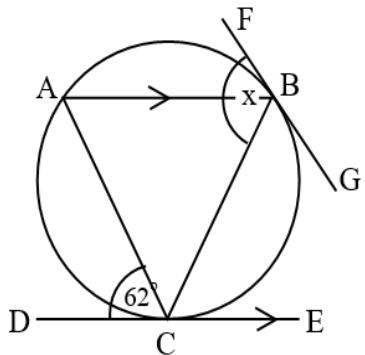
3) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 40°
- ข) 65°
- ค) 75°
- ง) 80°



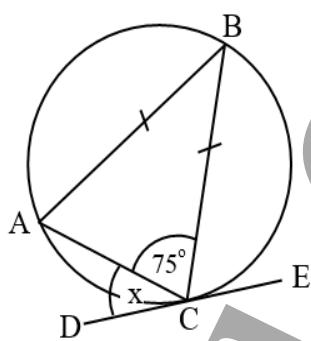
4) จากรูป จงหาค่า x

- Ⓐ) 124°
- Ⓑ) 120°
- Ⓒ) 118°
- Ⓓ) 116°



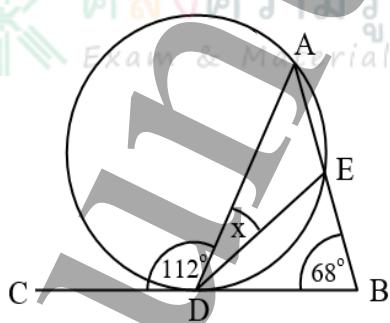
5) จากรูป จงหาค่า x

- Ⓐ) 20°
- Ⓑ) 25°
- Ⓒ) 30°
- Ⓓ) 35°

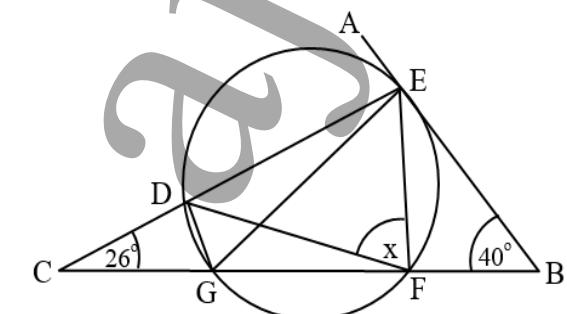


6) จากรูป จงหาค่า x

- Ⓐ) 22°
- Ⓑ) 23°
- Ⓒ) 24°
- Ⓓ) 26°

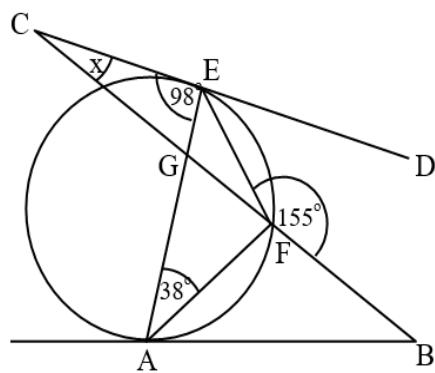


7) จากรูป จงหาค่า x



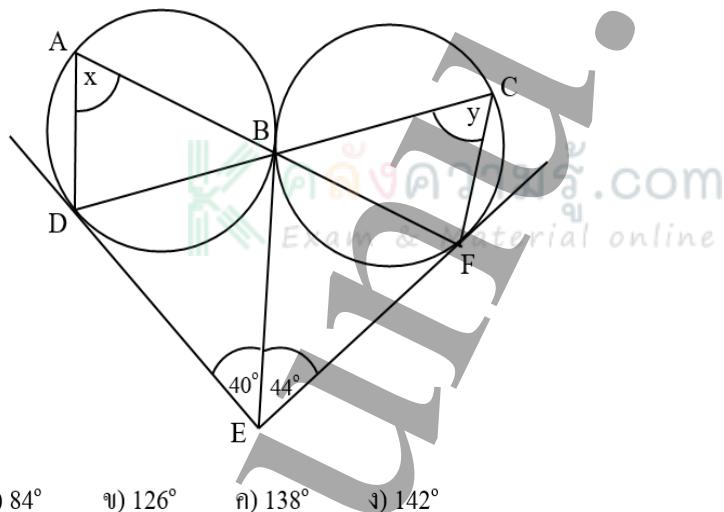
- Ⓐ) 14°
- Ⓑ) 38°
- Ⓒ) 48°
- Ⓓ) 66°

8) จากรูป จงหาค่า x



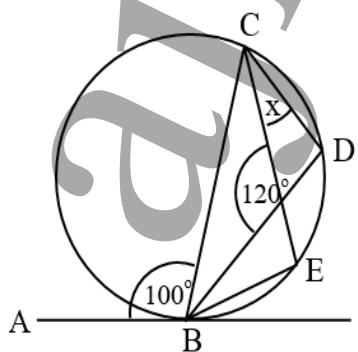
- Ⓐ) 13° Ⓑ) 14° Ⓒ) 15° Ⓓ) 16°

9) จากรูป จงหาค่า $x + y$



- Ⓐ) 84° Ⓑ) 126° Ⓒ) 138° Ⓓ) 142°

10) จากรูป จงหาค่า x

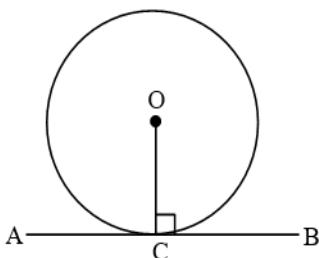


- Ⓐ) 10° Ⓑ) 15° Ⓒ) 20° Ⓓ) 30°

ajinul.com

หน้า 43 - 54
มีในเอกสารตัวเต็ม

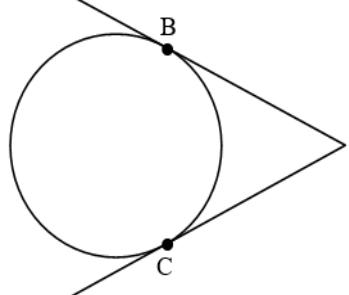
คุณสมบัติที่ 7



เส้นสัมผัสของวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส

จะได้ ;

$$\overline{OC} \perp \overline{AB}$$

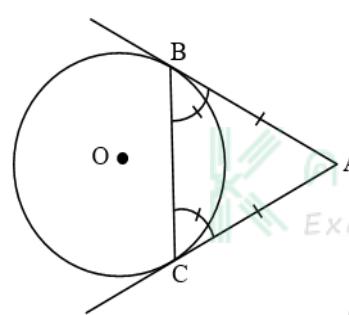


เส้นสัมผัสที่ลากจากจุดภายนอกวงกลมจุดหนึ่งมาสัมผัสวงกลม
เดียวกันย่อมยาวเท่ากัน

จะได้ ;

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$

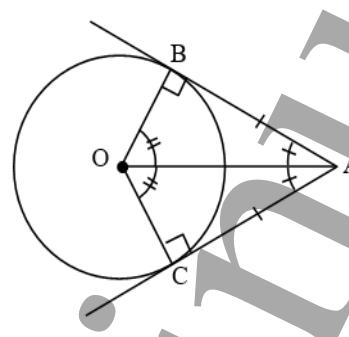
เพิ่มเติม



\overline{AB} และ \overline{AC} เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O ที่จุด B และ C ตามลำดับ $\overline{AB} = \overline{AC}$ เมื่อลาก \overline{BC} จะทำให้เกิดสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC

จะได้ ;

$$\hat{ABC} = \hat{ACB}$$

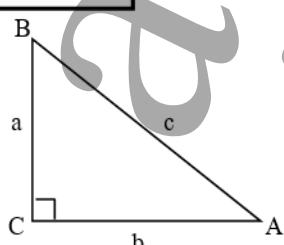


\overline{AB} และ \overline{AC} เป็นเส้นสัมผัสวงกลม O ที่จุด B และ C
 $\overline{AB} = \overline{AC}$, \overline{OB} และ \overline{OC} ตั้งฉากกับ \overline{AB} และ \overline{AC} เมื่อลากส่วน
ของเส้นตรง OA จะแบ่งครึ่งมุม $B\hat{O}C$ และ $B\hat{A}C$ และจะทำให้เกิด
สามเหลี่ยม 2 รูป ที่เท่ากันทุกประการ คือ สามเหลี่ยม ABO กับ ACO

จะได้ ;

$$\hat{B\hat{O}A} = \hat{C\hat{O}A}, \quad \hat{B\hat{A}O} = \hat{C\hat{A}O}$$

พฤษฎีกา勾股定理



กำหนดให้ สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

\overline{AB} ยาว c หน่วย, \overline{BC} ยาว a หน่วย, \overline{AC} ยาว b หน่วย

จะได้ ;

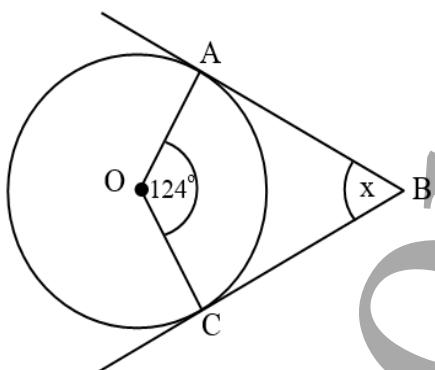
$$a^2 + b^2 = c^2$$

แบบฝึกหัดที่ 7

◎ ตอนที่ 1

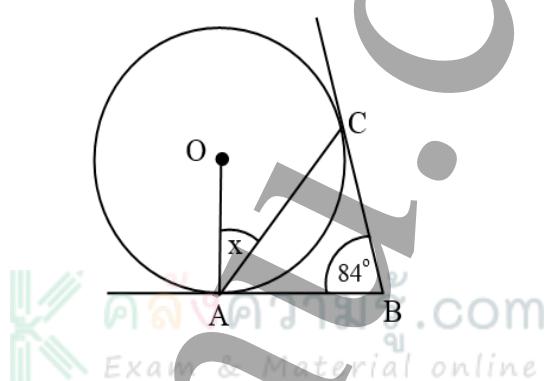
1) จากรูป จงหาค่า x

- (ก) 56°
- (ข) 60°
- (ค) 62°
- (ง) 64°



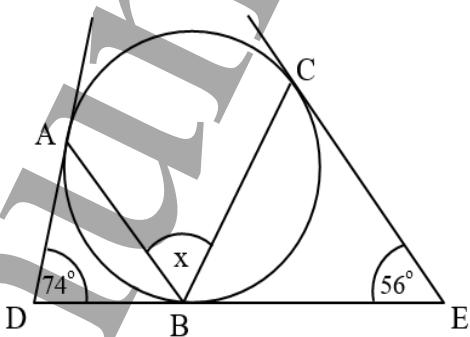
2) จากรูป จงหาค่า x

- (ก) 42°
- (ข) 44°
- (ค) 46°
- (ง) 48°



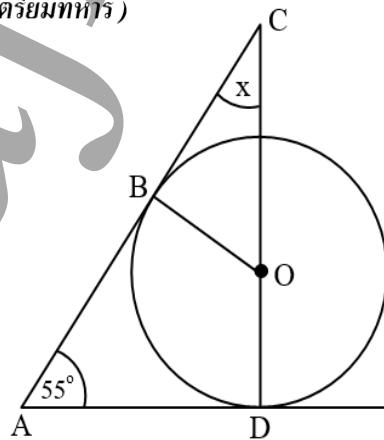
3) จากรูป จงหาค่า x

- (ก) 56°
- (ข) 65°
- (ค) 74°
- (ง) 78°



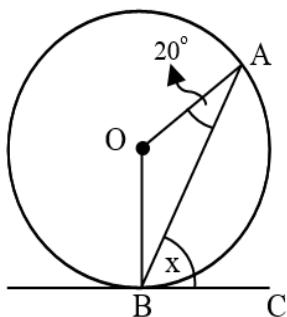
4) จากรูป จงหาค่า x (แนวตั้งที่ต้องใช้ทฤษฎีบทพีทา哥รัส)

- (ก) 55°
- (ข) 50°
- (ค) 45°
- (ง) 35°



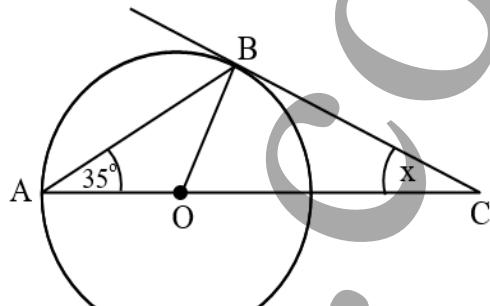
5) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 70°
- ข) 65°
- ค) 60°
- ง) 40°



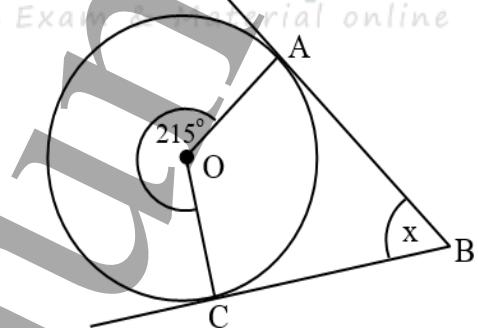
6) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 10°
- ข) 15°
- ค) 20°
- ง) 25°



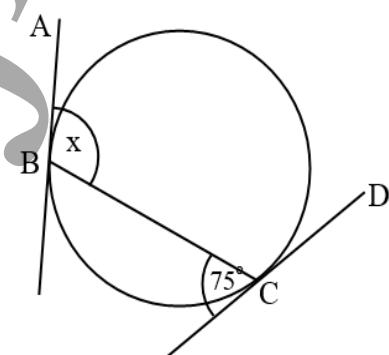
7) จากรูป จงหาค่า x (แนวเตรียมนักเรียน)

- ก) 30°
- ข) 35°
- ค) 40°
- ง) 45°



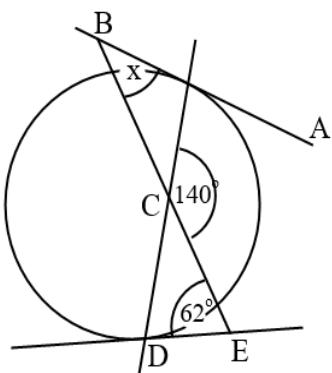
8) จากรูป จงหาค่า x

- ก) 150°
- ข) 120°
- ค) 115°
- ง) 105°



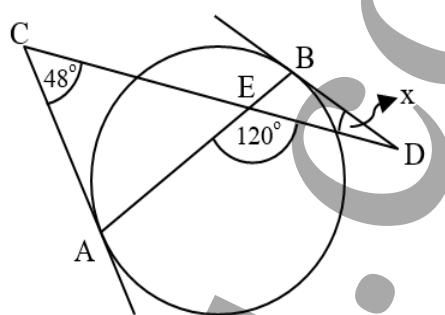
9) จากรูป จงหาค่า x

- Ⓐ) 31°
- Ⓑ) 34°
- Ⓒ) 36°
- Ⓓ) 38°



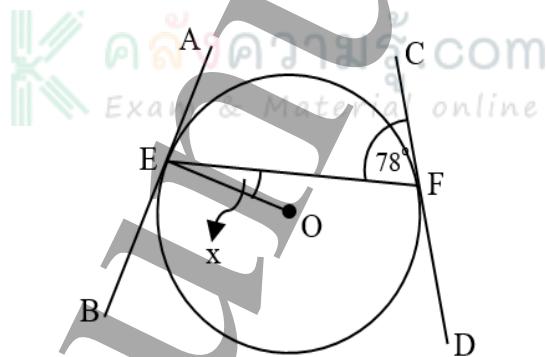
10) จากรูป จงหาค่า x (**แนวต่อริมทิศ**)

- Ⓐ) 12°
- Ⓑ) 14°
- Ⓒ) 18°
- Ⓓ) 22°



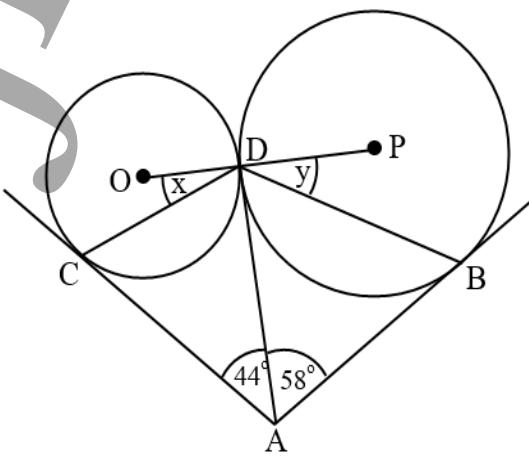
11) จากรูป จงหาค่า x

- Ⓐ) 10°
- Ⓑ) 12°
- Ⓒ) 14°
- Ⓓ) 16°



12) จากรูป วงกลม O, P เป็นวงกลมที่สัมผัสกันที่จุด D มี \overline{AB} , \overline{AD} , \overline{AC} สัมผัสวงกลม จงหาค่าของ $x + y$

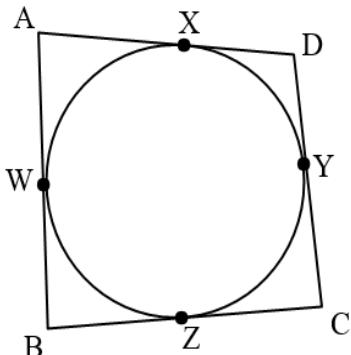
- Ⓐ) 49°
- Ⓑ) 50°
- Ⓒ) 51°
- Ⓓ) 52°



ajinul.com

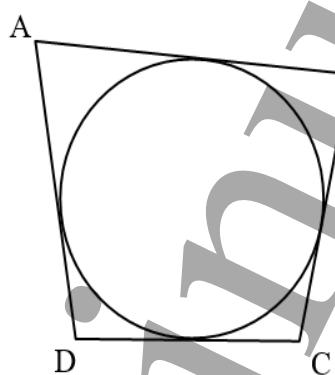
หน้า 59-70
มีในเอกสารตัวเต็ม

- 5) วงกลมบรรจุในรูปสี่เหลี่ยม ABCD มี \overline{AB} ยาว 12 หน่วย, $\overline{AX} = \overline{CZ}$, ความยาวรอบรูปของสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับ 38 หน่วย จงหาค่าของ $\overline{AW} + \overline{DY}$ ยาวเท่าไร



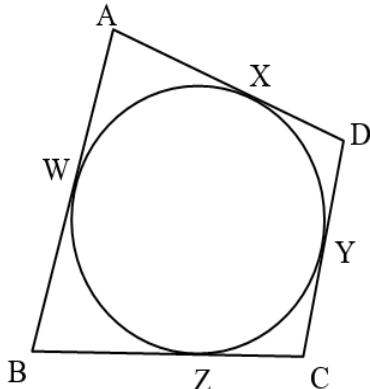
- ก) 5 หน่วย
- ข) 6 หน่วย
- ค) 7 หน่วย
- ง) 8 หน่วย

- 6) จากรูป จงหาความยาวของ \overline{AD} ยาวเท่าไร กำหนดให้ \overline{AB} ยาว 3.5 หน่วย, \overline{BC} ยาว 3 หน่วย, \overline{CD} ยาว 2.5 หน่วย



- ก) 2.5 หน่วย
- ข) 3 หน่วย
- ค) 3.5 หน่วย
- ง) 4 หน่วย

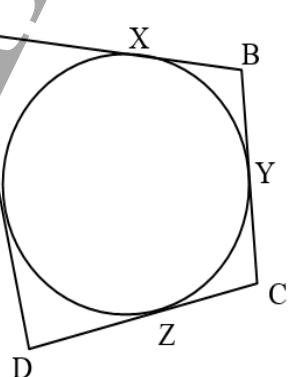
- 7) จากรูป ความยาวเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับ 36 หน่วย $\overline{AW} = 2(\overline{CY})$, \overline{AD} ยาวกว่า \overline{BC} อยู่ 3 หน่วย
จงหา \overline{AD} ยาวกี่หน่วย



- ก) 6.5 หน่วย
ข) 7 หน่วย
ค) 7.5 หน่วย
ง) 10.5 หน่วย

- 8) ข้อใดก่อค่าวุณค่าดัง

- ก) $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$
ข) $\overline{AB} + \overline{CD} < \overline{BC} + \overline{AD}$
ค) $\overline{AB} + \overline{CD} > \overline{BC} + \overline{AD}$
ง) ไม่มีข้อใดคู่ค่าดัง

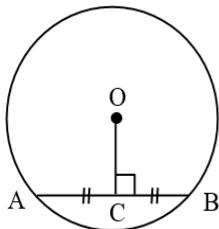


ajinul.com

หน้า 73-76
มีในเอกสารตัวเต็ม

คุณสมบัติที่ 8

ถ้าหากส่วนของเส้นตรงจากจุดศูนย์กลางของวงกลมไปตั้งฉากกับคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลางแล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งคอร์ด



จะได้ ;

$$\overline{AC} = \overline{BC}$$

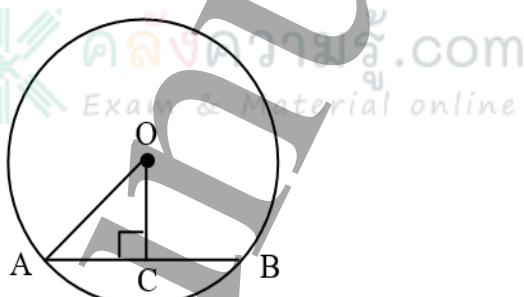
เสริม

คอร์ด 2 คอร์ดที่ยาวเท่ากัน จะมีระยะห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะเท่ากัน ในทางกลับกัน ถ้าคอร์ดสองคอร์ดมีระยะห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะเท่ากันแล้วคอร์ดสองคอร์ดนั้นจะยาวเท่ากันด้วย

แบบฝึกหัดที่ 8

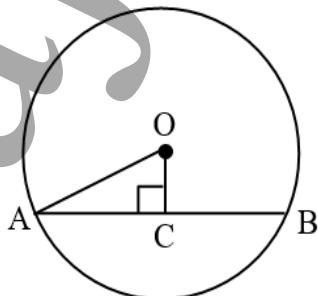
1) จากรูป \overline{OC} ยาว 6 หน่วย, \overline{AB} ยาว 16 หน่วย จงหา \overline{AO} ยาวเท่าไร

- (ก) 6 หน่วย
- (ข) 8 หน่วย
- (ค) 10 หน่วย
- (ง) 12 หน่วย



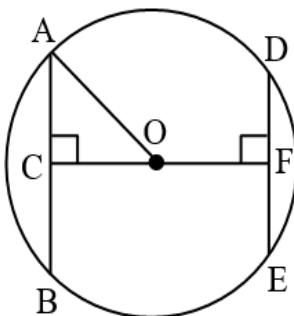
2) จากรูป \overline{OA} ยาว 13 หน่วย, \overline{OC} ยาว 5 หน่วย จงหา \overline{AB} ยาวเท่าไร

- (ก) 12 หน่วย
- (ข) 18 หน่วย
- (ค) 24 หน่วย
- (ง) 26 หน่วย



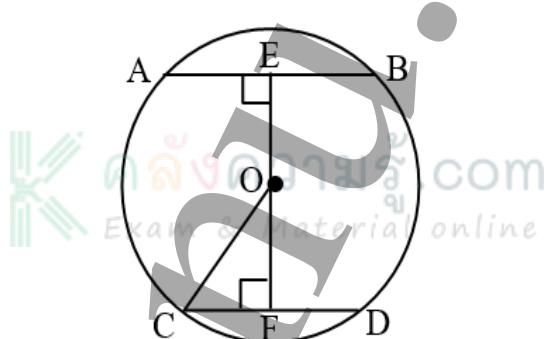
3) จากรูป \overline{AB} ยาว 48 หน่วย, \overline{AO} ยาว 40 หน่วย, \overline{CF} ยาว 56 หน่วย จงหา \overline{DE} ยาวเท่าไร

- ก) 48 หน่วย
- ข) 54 หน่วย
- ค) 64 หน่วย
- ง) 70 หน่วย



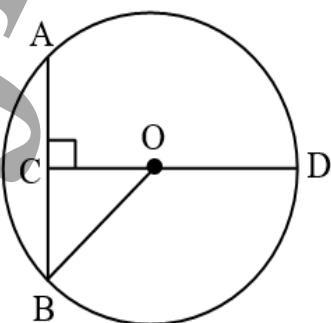
4) จากรูป $\overline{AB} = \overline{CD} = 12$ หน่วย, $\overline{EF} = 5$ หน่วย จงหา \overline{OC} ยาวเท่าไร

- ก) 5.5 หน่วย
- ข) 6 หน่วย
- ค) 6.5 หน่วย
- ง) 7 หน่วย



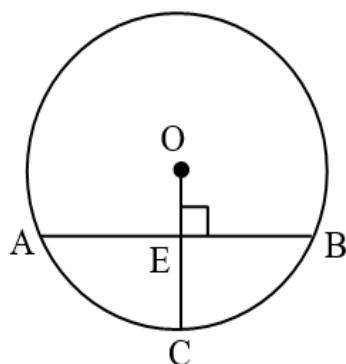
5) จากรูป $\overline{AB} = \overline{CD} = 24$ หน่วย จงหา \overline{OB} ยาวเท่าไร

- ก) 8 หน่วย
- ข) 10 หน่วย
- ค) 12 หน่วย
- ง) 15 หน่วย



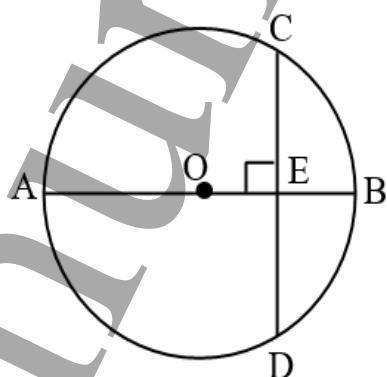
6) จากรูป $\overline{AB} = 24$ หน่วย, \overline{EC} ยาว 8 หน่วย จงหา ความยาวรัศมีวงกลม ยาวกี่หน่วย

- ก) 12 หน่วย
- ข) 13 หน่วย
- ค) 14 หน่วย
- ง) 15 หน่วย



7) จากรูป $\overline{AB} = 10$ หน่วย, $\overline{EB} = 2$ หน่วย จงหา \overline{DE} ยาวเท่าไร

- ก) 2 หน่วย
- ข) 2.5 หน่วย
- ค) 3 หน่วย
- ง) 4 หน่วย

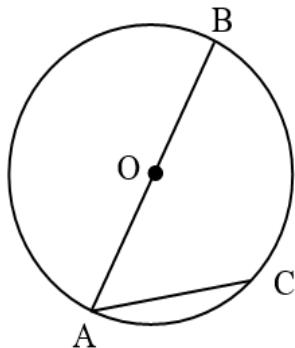


ajinul.com

หน้า 80 - 86
มีในเอกสารตัวเต็ม

22) จากรูป $\overline{AO} = \overline{AC} = 6$ หน่วย จงหาจุด O อยู่ห่างจาก \overline{AC} เท่าไร

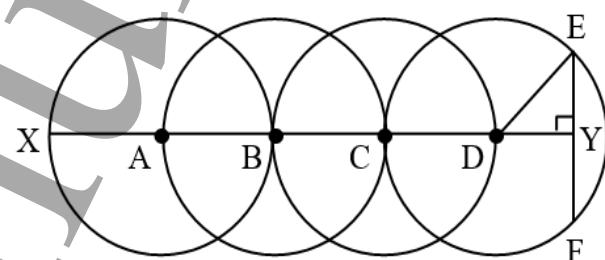
- Ⓐ) $\sqrt{3}$ หน่วย
- Ⓑ) $2\sqrt{3}$ หน่วย
- Ⓒ) $3\sqrt{3}$ หน่วย
- Ⓓ) $4\sqrt{3}$ หน่วย



23) จากรูป A, B, C, D เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม 4 วง ที่มีรัศมีเท่ากัน ถ้า $DE = 13$ หน่วย และ EF เป็นครึ่งดiameter ยาว

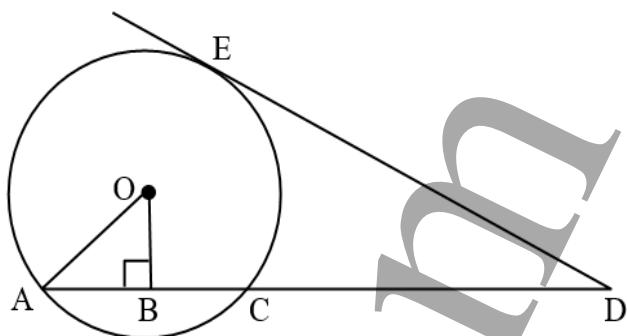
24 หน่วย จงหา XY ยาวกี่หน่วย (แนวตั้งยมทหาร)

- Ⓐ) 52 หน่วย
- Ⓑ) 54 หน่วย
- Ⓒ) 56 หน่วย
- Ⓓ) 57 หน่วย



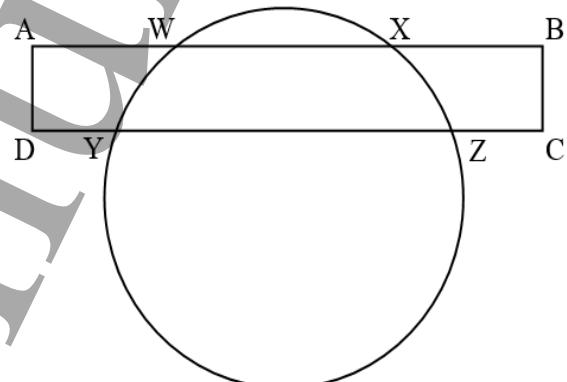
24) จากรูป จงหาความยาวของ \overline{DE} ยาวเท่าไร เมื่อกำหนดให้ $\overline{OA} = 10$ หน่วย, $\overline{OB} = 6$ หน่วย, $\overline{CD} = 20$ หน่วย

- ก) $6\sqrt{5}$ หน่วย
- ข) $8\sqrt{5}$ หน่วย
- ค) $10\sqrt{5}$ หน่วย
- ง) $12\sqrt{5}$ หน่วย



25) สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD ตั้งวงกลมที่จุด W, X, Y, Z ดังรูป ถ้า $\overline{AW} = 6$ หน่วย, $\overline{DY} = 4$ หน่วย, $\overline{YZ} = 16$ หน่วย
จงหา \overline{WX} ยาวเท่าไร (สามารถคิดๆ)

- ก) 10 หน่วย
- ข) 12 หน่วย
- ค) 14 หน่วย
- ง) 16 หน่วย

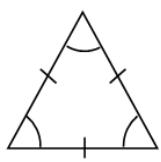


ajinul.com

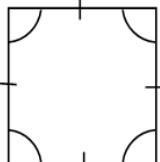
หน้า 89
มีในเอกสารตัวเต็ม

คุณสมบัติที่ 9 การสร้างรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่า หมายถึง รูปที่มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน และมุมทุกมุมมีขนาดเท่ากัน เช่น



สามเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า



สี่เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า



ห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า



หกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

การสร้างรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าจากวงกลม

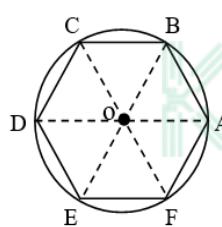
- 1) แบ่งมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมออกเป็น n ส่วนเท่าๆ กัน ตามรูป n เหลี่ยมที่ต้องการสร้างจะได้

$$\text{มุมคง } \frac{360}{n} \text{ องศา}$$

- 2) ลากรัศมีของวงกลมทำมุมกัน $\frac{360}{n}$ องศา

- 3) ลากเส้นตรงเชื่อมจุดที่รัศมีตัดเส้นรอบวงของวงกลม ก็จะได้รูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

ตัวอย่าง การสร้างรูป 6 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า



ขั้นตอนที่ 1 ใช้จุด O เป็นจุดศูนย์กลาง โดยมี \overline{OA} เป็นรัศมี

ขั้นตอนที่ 2 แบ่งมุมรอบจุด O ออกเป็น 6 มุมเท่าๆ กัน โดยใช้ไม้ไผ่แทรกราด

$$\text{สร้างมุมคง } \frac{360}{6} = 60 \text{ องศา}$$

ขั้นตอนที่ 3 ลากเส้นตรงจากจุด O ไปยังเส้นรอบวงตามขนาดมุมที่แบ่งเอาไว้ จะได้จุด A, B, C, D, E, F

ขั้นตอนที่ 4 ลาก $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FA}$ จะได้รูป 6 เหลี่ยมด้านเท่า มุมเท่าตามต้องการ

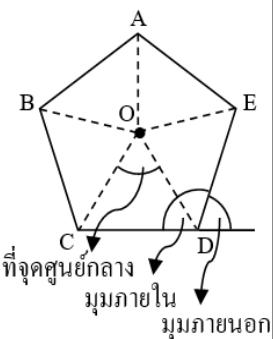
$$\text{ผลรวมของมุมภายในรูป } n \text{ เหลี่ยม} = 180(n-2)$$

$$\text{ขนาดของมุมภายในรูป } n \text{ เหลี่ยมด้านเท่า} = \frac{180(n-2)}{n}$$

$$\text{ขนาดของมุมภายในรูป } n \text{ เหลี่ยมด้านเท่า} = 180 - \text{มุมภายใน}$$

$$\text{ขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางรูป } n \text{ เหลี่ยมด้านเท่า} = \text{ขนาดของมุมภายในออก} = \frac{360}{n}$$

$$\text{จำนวนเส้นที่แยกมุมรูป } n \text{ เหลี่ยม} = \frac{n}{2}(n-3)$$



* ผลรวมมุมภายในออกทั้งหมดของรูปเหลี่ยมใดๆ ตามรวมกันได้ 360° *

แบบฝึกหัดที่ 9

- 1) จงเติมคำต่อลงในช่องว่างให้ถูกต้อง

๙ เหลี่ยมด้าน เท่ากันเท่า	ผลรวม มุมภายใน	ขนาด มุมภายใน	ขนาด มุมภายนอก	ขนาด มุมที่จุดศูนย์กลาง	จำนวน เส้นที่แยกมุม
3 เหลี่ยม					
4 เหลี่ยม					
5 เหลี่ยม					
6 เหลี่ยม					
7 เหลี่ยม					
8 เหลี่ยม					
9 เหลี่ยม					
10 เหลี่ยม					
11 เหลี่ยม					
12 เหลี่ยม					

- 2) ถ้ามุมภายนอกมุมหนึ่งของรูป平行ล័เรี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งเท่ากับ 15 องศา จงหาว่ารูป平行ล័เรี่ยมเหลี่ยมนั้นเป็นรูป
กี่เหลี่ยม (**แนวเตรียมบทหาร**)

ก) 18 เหลี่ยม ข) 20 เหลี่ยม ค) 22 เหลี่ยม ง) 24 เหลี่ยม

- 3) รูป平行ล័เรี่ยมด้านเท่ามุมเท่า มีมุมภายใน각 156 องศา เป็นรูปกี่เหลี่ยม

ก) 15 เหลี่ยม ข) 14 เหลี่ยม ค) 13 เหลี่ยม ง) 12 เหลี่ยม

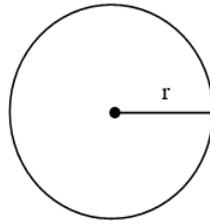
- 4) จงหาจำนวนเส้นที่แยกมุมรูป 25 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ามีกี่เส้น

ก) 225 เส้น ข) 250 เส้น ค) 275 เส้น ง) 300 เส้น

ajinul.com

หน้า 92-95
มีในเอกสารตัวเต็ม

คุณสมบัติที่ 10 ความยาวของเส้นรอบวงและพื้นที่ของวงกลม

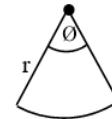
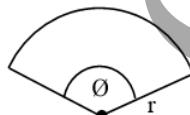
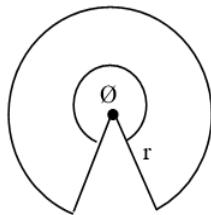


$$\text{ความยาวของเส้นรอบวง} = 2\pi r$$

$$\text{พื้นที่วงกลม} = \pi r^2$$

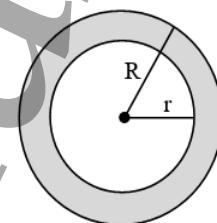
r = ความยาวรัศมีวงกลม

$$\pi \approx \frac{22}{7} \text{ หรือ } 3.14 \quad (\pi \text{ อ่านว่า พาย})$$



$$\text{พื้นที่ของส่วนของวงกลม (เซกเตอร์)} = \frac{\theta}{360} (\pi r^2)$$

$$\text{ความยาวของส่วนโค้งของวงกลม (เซกเตอร์)} = \frac{\theta}{360} (2\pi r)$$

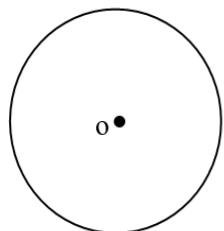


$$\begin{aligned}\text{พื้นที่ของวงแหวน} &= \text{พื้นที่วงกลมใหญ่} - \text{พื้นที่วงกลมเล็ก} \\ &= \pi R^2 - \pi r^2 \\ &= \pi(R^2 - r^2)\end{aligned}$$

$$\text{พื้นที่ของวงแหวน} = \pi(R^2 - r^2)$$

แบบฝึกหัดที่ 10

- 1) จากรูป จงหาพื้นที่และความยาวรอบรูปของวงกลม O เมื่อกำหนดให้รัศมียาว 7 เซนติเมตร ($\pi = \frac{22}{7}$)

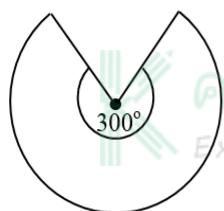


พื้นที่วงกลม

ความยาวรอบรูป

$$\begin{aligned} &= \underline{\hspace{2cm}} \text{ ตารางเซนติเมตร} \\ &= \underline{\hspace{2cm}} \text{ เซนติเมตร} \end{aligned}$$

- 2) จากรูป จงหาพื้นที่และความยาวของส่วนของส่วนโถ้งของวงกลม เมื่อกำหนดให้รัศมียาว 4.2 เซนติเมตร ($\pi = \frac{22}{7}$)



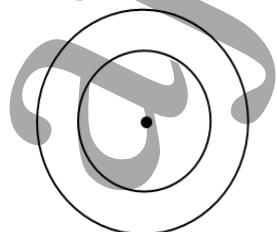
พื้นที่ส่วนของวงกลม

ความยาวส่วนโถ้งของวงกลม

$$= \underline{\hspace{2cm}} \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

$$= \underline{\hspace{2cm}} \text{ เซนติเมตร}$$

- 3) จงหาพื้นที่ของวงแหวน กำหนดให้วงกลมใหญ่และวงกลมเล็กมีรัศมี 14, 7 หน่วยตามลำดับ ($\pi = \frac{22}{7}$)

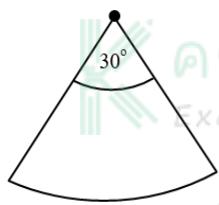


$$\text{พื้นที่วงแหวน} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ ตารางหน่วย}$$

- 4) กำหนดให้วงกลมรูปหนึ่งมีพื้นที่ 38.5 ตารางหน่วย จงหาความยาวของรัศมีวงกลมนี้
 ก) 2.5 หน่วย ข) 3 หน่วย ค) 3.5 หน่วย ง) 4 หน่วย

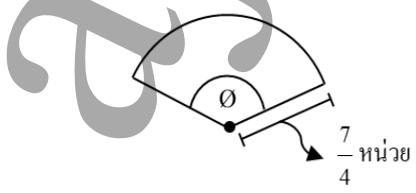
- 5) กำหนดให้วงกลมรูปหนึ่งมีความยาวรอบรูป 154 หน่วย จงหาความยาวของรัศมีวงกลม
 ก) 20 หน่วย ข) 22.5 หน่วย ค) 23.75 หน่วย ง) 24.5 หน่วย

- 6) กำหนดส่วนของวงกลมรูปหนึ่งมีพื้นที่เท่ากับ $\frac{77}{3}$ ตารางหน่วย จงหาความยาวของรัศมีวงกลม



- ก) $5\sqrt{2}$ หน่วย
 ข) $6\sqrt{2}$ หน่วย
 ค) $7\sqrt{2}$ หน่วย
 ง) $8\sqrt{2}$ หน่วย

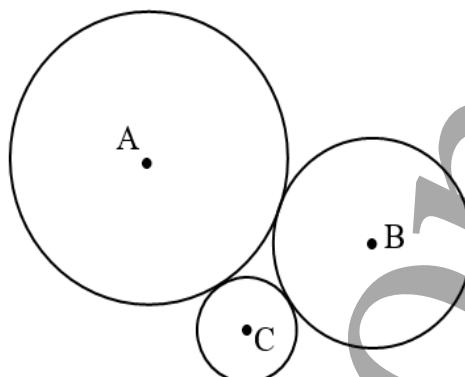
- 7) กำหนดให้ส่วนของวงกลมรูปหนึ่งมีความยาวส่วนโค้งเท่ากับ $\frac{14\pi}{9}$ หน่วย จงหาค่าของ θ กีองศา



- ก) 120°
 ข) 140°
 ค) 150°
 ง) 160°

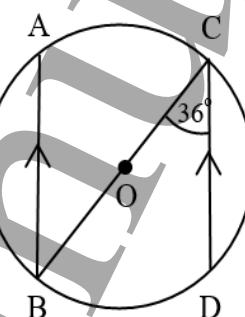
- 8) ให้ A , B , C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม 3 วง 使得ผังซึ่งกันและกัน \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC} ยาว $20, 14, 8$ หน่วย
ตามลำดับ จงหาว่า พื้นที่วงกลม A กับ C ต่างกันเท่าไร

- ก) 424 ตารางหน่วย
- ข) 484 ตารางหน่วย
- ค) 528 ตารางหน่วย
- ง) 564 ตารางหน่วย



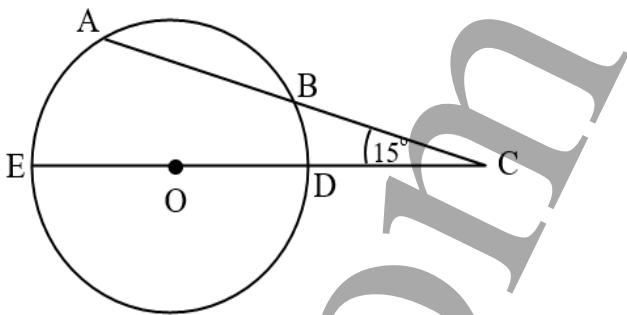
- 9) อยากรู้ว่าความยาวส่วนโค้งน้อย AC รวมกับความยาวส่วนโค้งน้อย BD ยาวเป็นเศษส่วนเท่าไรของความยาวเส้นรอบวงกลม O

- ก) $\frac{2}{5}$
- ข) $\frac{3}{5}$
- ค) $\frac{4}{7}$
- ง) $\frac{5}{7}$



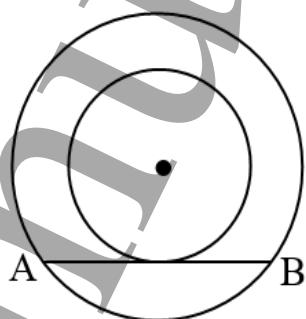
- 10) O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม \overline{BC} มีความยาวเท่ากับรัศมีของวงกลม ส่วนโถงน้อย AE ยาวเท่าไร รัศมี
วงกลมยาว 15 ซม. (สมการคณิต ๑)

- ก) 15 ซม.
- ข) $\frac{15}{2}\pi$ ซม.
- ค) 5π ซม.
- ง) $\frac{15}{4}\pi$ ซม.



- 11) วงกลม 2 วง ร่วมจุดศูนย์กลางดังรูป มีพื้นที่วงแหวน 8π ตารางนิว เมื่อเขียนครอ๊ด AB ของวงกลมใหญ่ให้
สัมผัสกับวงกลมเล็ก ครอ๊ด AB จะยาวกี่นิว (แนวตระรียมอุดม)

- ก) 9 นิว
- ข) 12 นิว
- ค) 16 นิว
- ง) 18 นิว



หน้า 101 - 108
มีในเอกสารตัวเต็ม