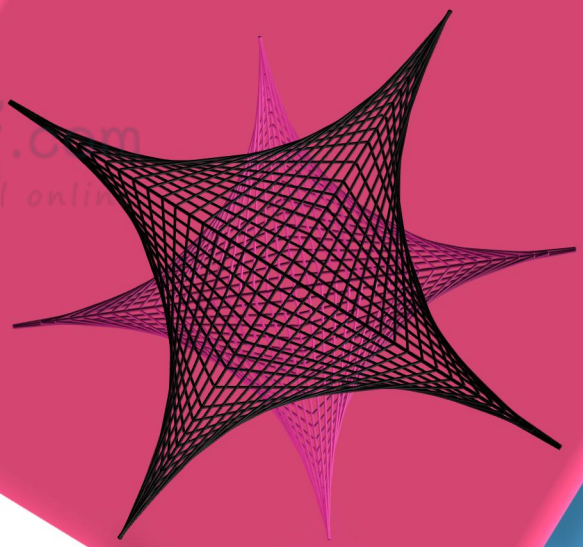
Graph Analytics:

Mathematical Equations for Analysis and Interpretation

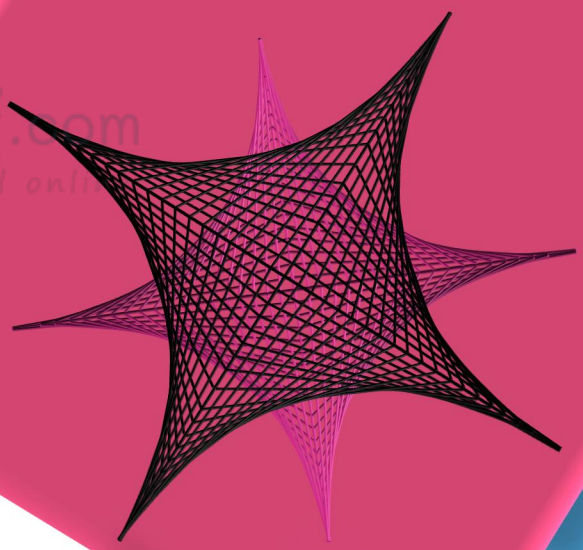


คลังความรู้.com
Exam & Material online

NUTTHAKRIT P.

กราฟทางคณิตศาสตร์

การวิเคราะห์และแปลผลสมการฟังชันก์และความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์



คลังความรู้.com
Exam & Material online

ณัฐกิตติ์ ปกรณ์เลิศอุดม

คลังความรู้.com
Exam & Material online

คำนำ

การศึกษาเกี่ยวกับกราฟเป็นสิ่งที่น่าทึ่งและน่าสนใจอย่างยิ่ง การใช้กราฟเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์ในการแสดงความสัมพันธ์และโครงสร้างของข้อมูลในหลายๆ ด้านในชีวิตประจำวัน ไม่ว่าจะเป็นการวิเคราะห์ข้อมูลต่างๆ อาทิเช่น ข้อมูลทางการศึกษาในศาสตร์ต่างๆไม่ว่าจะเป็นวิทยาศาสตร์, เศรษฐศาสตร์ การออกแบบปรับเปลี่ยนงบประมาณในโครงการต่างๆ รวมไปถึงการใช้กราฟเพื่อคาดคะเนหรือทำนายความสัมพันธ์ของสิ่งที่กำลังศึกษาอยู่ เป็นต้น

หนังสือเล่มนี้เป็นหนังสือคณิตศาสตร์เกี่ยวกับกราฟที่ใช้ในการศึกษาในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ถูกออกแบบให้เหมาะสมสำหรับนักเรียนที่มีพื้นฐานคณิตศาสตร์เบื้องต้นและผู้ที่สนใจในการศึกษาเกี่ยวกับกราฟ แต่ไม่จำเป็นต้องมีความเชี่ยวชาญเป็นพิเศษมากนัก โดยเขียนขึ้นมาเพื่อช่วยให้ผู้อ่านเข้าใจและเรียนรู้เกี่ยวกับกราฟในแง่มุมต่างๆ เนื้อหาของหนังสือนี้จะมุ่งเน้นไปที่การดูกราฟในลักษณะต่างๆ การวิเคราะห์พฤติกรรมของกราฟในรูปแบบต่างๆ และเมื่อเนื้อหาจบในแต่ละบทจะมีแบบฝึกหัดให้ได้ฝึกฝนและพัฒนาทักษะ โดยเฉลยแบบฝึกหัดจะนำไปเฉลยอย่างละเอียดในหนังสือ Manual Solution อีกที

คลังความรู้.com
Exam & Material Online

หวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์กับผู้อ่านทุกๆท่าน หากมีข้อผิดพลาดประการใด ขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

エーク様（さま）

(ท่านเอก)

Contents สารบัญ

CHAPTER 1: INTRODUCTION 7

COORDINATE POINT: จุดพิกัดฉาก 10

CARTESIAN PRODUCT: ผลคูณคาร์ทีเซียน 11

RELATION: ความสัมพันธ์ 18

CARTESIAN COORDINATE PLANE: ระบบพิกัดแกนฉาก 23

DOMAIN & RANGE: โดเมนและเรนจ์ 33

TYPE OF RELATION: ประเภทของความสัมพันธ์ 69

FUNCTION: ฟังชันก์ 76

FUNCTION CHECKING: การตรวจสอบฟังชันก์ 77

SYMBOL OF FUNCTION: สัญลักษณ์ฟังชันก์ 87

LIST OF FUNCTION: ประเภทของฟังชันก์ต่างๆ 90

INVERSE RELATION & FUNCTION: อินเวอร์สของความสัมพันธ์และฟังชันก์ 96

INVERSE OF GRAPH: อินเวอร์สกราฟ 106

PROBLEMS: โจทย์ปัญหา 109

CHAPTER 2: TRANSFORMATION RULES AND PROPERTIES OF GRAPH 117

คลังความรู้.com
Exam & Material online

คลังความรู้.com
Exam & Material online

CHAPTER 1: INTRODUCTION

บทที่ 1: บทนำพื้นฐานที่ควรรู้ของกราฟ

คลังความรู้.com
Exam & Material online

COORDINATE

CARTESIAN

CARTESIAN PRODUCT

CARTESIAN COORDINATE PLANE

RELATION

DOMAIN

RANGE

FUNCTION

INVERSE RELATION

INVERSE FUNCTION

คลังความรู้.com
Exam & Material online

ในการจะทำความเข้าใจในเรื่องของกราฟนั้น สิ่งที่เราต้องรู้ก่อนที่เราจะเริ่มวาดหรือวิเคราะห์กราฟทุกชนิดก็คือ “**กราฟและสมการของกราฟเหล่านั้นกำลังบ่งบอกข้อมูลอะไรให้เราทราบอยู่**” หากเราไม่รู้พื้นฐานอาจจะทำให้เราเกิดความสับสน, ไม่รู้ว่าจะเริ่มต้นยังไง รวมไปถึงไม่รู้ที่มาที่ไปของกราฟ ดังนั้นแล้วการทำความเข้าใจพื้นฐานสำคัญก่อนที่จะไปเจาะลึกแต่ละกราฟ ย่อมเป็นทางเลือกที่ดีที่สุด โดยเราจะเริ่มจากเรียงลำดับเนื้อหาดังนี้

1) Cartesian Product **(ผลคูณคาร์ทีเซียน)**

$$\boldsymbol{A \times B = \{(a,b),(a,c),\dots\dots\}}$$

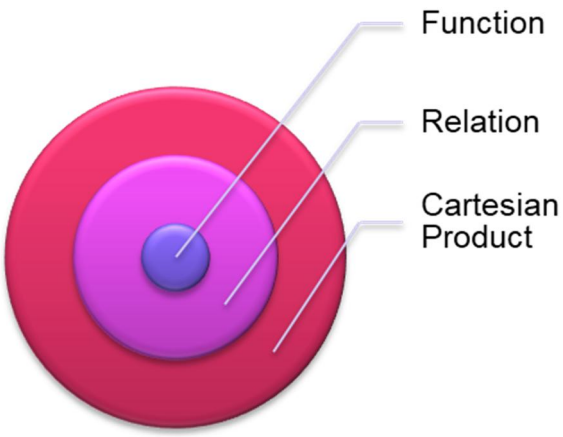
2) Relation **(ผลคูณคาร์ทีเซียนที่มีเงื่อนไขความสัมพันธ์)**

$$\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{A \times B} \mid \text{เงื่อนไขความสัมพันธ์}\}$$

3) Function (Relation **ที่เพิ่มเงื่อนไข)**

$$\boldsymbol{f} = \{\boldsymbol{A \times B} \mid \text{เงื่อนไขความสัมพันธ์ที่มีข้อบังคับเพิ่มเติม}\}$$

คลังความรู้.com
Exam & Material online



รูปภาพที่ 1 หากเราสังเกตความสัมพันธ์ของทั้งสามอย่างจากแผนภาพนี้ จะพบว่าไม่ว่าจะเป็น Function หรือ Relation ต่างก็เป็น Cartesian Productทั้งสิน ต่างกันตรงที่เงื่อนไขความสัมพันธ์ที่บังคับการจับคู่ภายในเท่านสมาชิก

COORDINATE POINT: จุดพิกัดฉาก

"Coordinate Point" หรือ "คู่อันดับ" มีได้หลากหลายความหมายในแต่ละบริบท แต่โดยจุดประสงค์หลักในทางคณิตศาสตร์คือ **"การบอกตำแหน่งที่อยู่ในระบบเรขาคณิต"** โดยคู่อันดับเป็นการเชื่อมกันของตำแหน่ง 2 ตำแหน่งในคนละมิติ หรือในบางครั้ง 3 ตำแหน่งในคนละมิติ เพื่อที่จะได้จุดตำแหน่ง 1 จุดที่แม่นยำ

การเชื่อมกันในแต่ละมิติเกิดจากกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า "Cartesian Product" หรือ **"ผลคูณคาร์ทีเซียน"** (ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อถัดไป) รูปแบบของคู่อันดับเป็นดังนี้

(x, y) 2 มิติ (x, y, z) 3 มิติ

โดย

x เป็นสมาชิกตัวหน้าซึ่งแสดงตำแหน่งในมิติแกน x

y เป็นสมาชิกตัวหลังซึ่งแสดงตำแหน่งในมิติแกน y

z เป็นสมาชิกตัวหลังซึ่งแสดงตำแหน่งในมิติแกน z

Exam & Material online

การใช้คู่อันดับมีความสำคัญมากสำหรับเรื่องกราฟเนื่องจากถ้าเราได้ศึกษาในเนื้อหาส่วนถัดๆไปจะพบว่า กราฟที่เราวาดกันอยู่ทุกวันนี้ล้วนเกิดจากการจับคู่ของ xและy หรือ x, zและy ทั้งสิ้น ดังนั้นเราควรที่จะทำความเข้าใจให้ถ่องแท้

สำหรับเนื้อหาทั้งหมดของเล่มนี้จะกล่าวรายละเอียดกราฟทั้งหมดเพียงแค่ระบบ 2 มิติเท่านั้น

René Descartes

31/03/1596-11/02/1650 (53 ปี)

René Descartes เป็นนักปรัชญาและนักคณิตศาสตร์ชื่อดังของฝรั่งเศสที่มีผลงานสำคัญมากมายในด้านการปรัชญาและคณิตศาสตร์ เป็นผู้สร้างแนวคิด Cartesianism ที่มีผลกระทบต่อวิทยาศาสตร์และปรัชญามากที่สุดในประวัติศาสตร์

แนวคิด Cartesian product คือการนำสองเซตของข้อมูลมาเชื่อมต่อกันเพื่อสร้างเซตใหม่ที่ประกอบด้วยคู่อันดับของข้อมูลจากทั้งสองเซต โดย René Descartes ได้ใช้แนวคิด Cartesian product เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์และเรขาคณิต โดยเขาเชื่อว่าความสัมพันธ์นี้สามารถนำไปใช้ในการอธิบายพหุนามและเรขาคณิตเชิงพื้นที่ได้ดีมาก และเป็นที่พัฒนาต่อยอดโดยนักคณิตศาสตร์อื่น ๆ ต่อมา

CARTESIAN PRODUCT: ผลคูณคาร์ทีเซียน

การเกิดกราฟนั้นมีต้นกำเนิดมาจากเรื่อง "Cartesian Product" หรือ "ผลคูณคาร์ทีเซียน" โดยมีหลักการง่ายๆดังนี้ ถ้าAและBเป็นSetใดๆแล้ว ผลคูณคาร์ทีเซียนของAและBจะเป็นSetที่มีสมาชิกเป็นคู่อันดับ(x, y)ที่เกิดจากการเชื่อมกันของสมาชิกของA กับสมาชิกของ B โดยสามารถเขียนเป็นนิยามแบบประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(x, y) | x \in A \text{ และ } y \in B\}$$

หากกำหนดให้

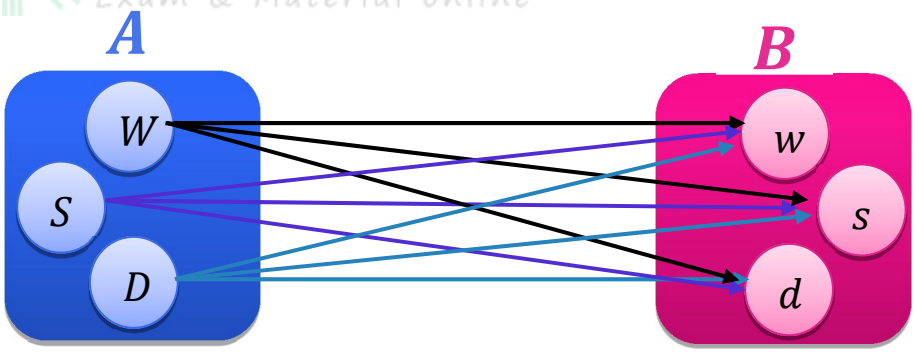
$\boldsymbol{A} = \{W, S, D\}$

$\boldsymbol{B} = \{w, s, d\}$

ผลคูณคาร์ทีเซียนของ $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ จะได้

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \left\{\begin{matrix} (W, w), (W, s), (W, d), \\ (S, w), (S, s), (S, d), \\ (D, w), (D, s), (D, d) \end{matrix}\right\}$$

คลังความรู้.com
Exam & Material online

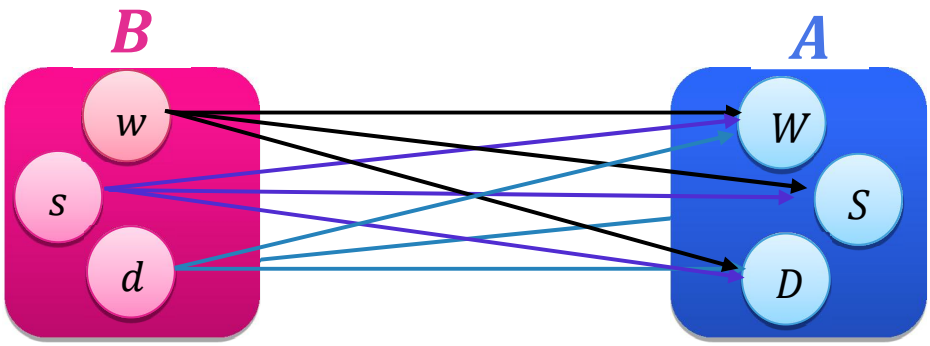


รูปภาพที่ 2 ผลคูณคาร์ทีเซียนสามารถทำได้ไม่ยากโดยการใช้แผนภาพเชื่อม โดยสมาชิกตัวข้างหน้าจะต้องโยงไปให้ทั่วถึงทุกสมาชิกตัวหลัง และทำในลักษณะเดียวกันกับสมาชิกของSet Aตัวอื่นๆจนครบ

ผลลัพธ์ของการคูณคาร์ทีเซียนจะเป็นการจับคู่กันระหว่างสมาชิกข้ามSetกันโดยจะต้องเริ่มจากสมาชิกของSETที่อยู่ข้างหน้าเครื่องหมาย$\times$ก่อนเสมอ ดังนั้นแล้วหากเราสลับตำแหน่งของ $\boldsymbol{A}$ และ $\boldsymbol{B}$ ผลลัพธ์จะไม่เหมือนกัน

ลองพิจารณาผลคูณของ $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$

$$B \times A = \left\{ \begin{matrix} (w,W),(w,S),(w,D), \\ (s,W),(s,S),(s,D), \\ (d,W),(d,S),(d,D) \end{matrix} \right\}$$



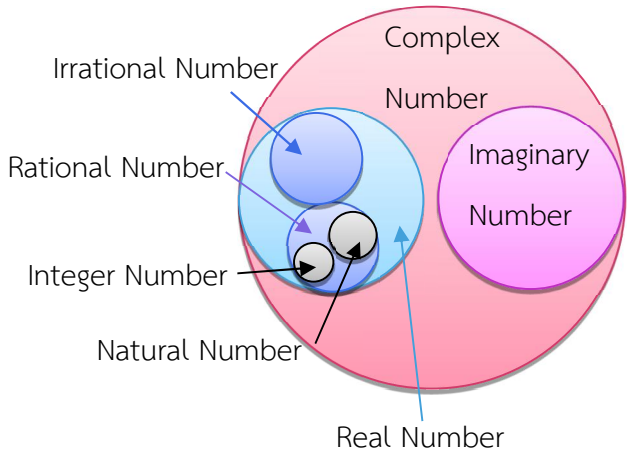
รูปภาพที่ 3 ภาพการแสดงกระบวนการจับคู่ของCartesian Productระหว่างSet BและSet A ซึ่งการจับคู่ในกระบวนการนี้จะจับคู่แบบทั่วถึงทุกสมาชิกโดยสมาชิกของSet Bจะเป็นตัวหน้าและสมาชิกของSet Aจะเป็นตัวหลัง

จากทั้งสองตัวอย่างด้านบนจะพบว่าหากเราสลับSetการคูณคาร์ทีเซียนก็จะให้มีสมาชิกคู่อันดับไม่เหมือนกันเสมอ

$$A \times B \neq B \times A$$

คลังความรู้.com
Exam & Material Online

ในทางปฏิบัติ SETที่จพทำการคูณกันแบบคาร์ทีเซียน $(A \times B)$ จะเป็นSETของอะไรก็ได้ ซึ่งในทางคณิตศาสตร์จะมีหลักๆดังนี้ สามารถดูรูปภาพที่4 ประกอบได้ครับ



รูปภาพที่4 จำนวนในทางคณิตศาสตร์เมื่อาเขียนเป็นแผนภาพแวนออยเลอร์ จะพบว่าComplex Numberเป็นจำนวนที่ใหญ่สุดครอบคลุมทุกจำนวน

1. $\mathbb{C}$ คือSETของ**จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)**
2. $\mathbb{R}$ คือSETของ**จำนวนจริง (Real Number)**
3. $\mathbb{Z}$ คือSETของ**จำนวนเต็ม (Integer Number)**
4. $\mathbb{Q}$ คือSETของ**จำนวนตรรกยะ (Rational Number)**
5. $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ หรือ $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ คือSETของ**จำนวนอตรรกยะ (Irrational Number)**
6. $\mathbb{N}$คือSETของ**จำนวนธรรมชาติหรือจำนวนนับ (Natural Number)**
7. $\mathbb{I}$ คือSETของ**จำนวนจินตภาพ (Imaginary Number)**

นอกเหนือจากนี้ยังสามารถเป็นSETจำนวนใดๆที่ไม่เกี่ยวข้องหรือนอกเหนือจากคณิตศาสตร์ก็ได้ ขึ้นอยู่กับว่าโจทย์ต้องการจะต้องการทดสอบอะไร เช่น SETของ

จำนวนเต็มคู่, SETของจำนวนที่เป็นลำดับฟิโบนักชีห้าลำดับแรก, SETของสระในภาษาไทย, SET ของตัวคาตาคานะ, SETของเพศ, SETของรายชื่อของเสาหลักทั้ง7 ฯลฯ

Example 1.1

กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ และ $B = \{a, b\}$ จงหาสมาชิกทั้งหมดของ $A \times B, B \times A, A \times A, B \times B$ และ $A \times B \times A$

Sol^n

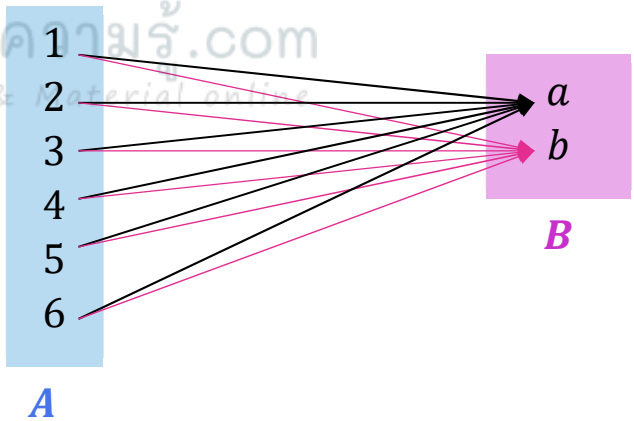
- $\boldsymbol{A \times B}$

จากนิยาม

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ และ } y \in B\}$$

จากนิยามของผลคูณคาร์ทีเซียนเราสามารถใช้แผนภาพเพื่อเขียนเชื่อมสมาชิกของทั้งสองSetได้ดังนี้

คลังความรู้.com
Exam & Material online



และเมื่อนำคู่อันดับที่ได้จากการเชื่อมกันของสมาชิกในSet A และSet B มาเขียนในรูปแบบSet จะได้ดังนี้

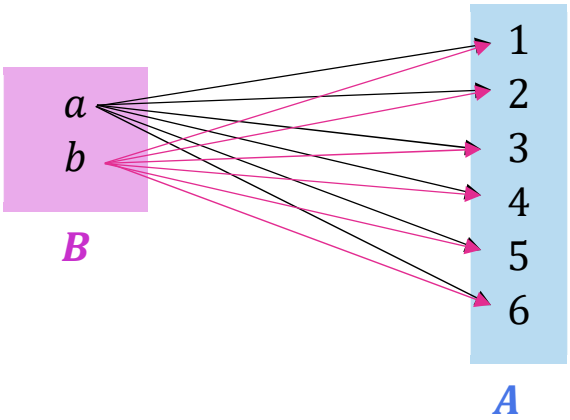
$$A \times B = \left\{ \begin{matrix} (1, a), (1, b), \\ (2, a), (2, b), \\ (3, a), (3, b), \\ (4, a), (4, b), \\ (5, a), (5, b), \\ (6, a), (6, b) \end{matrix} \right\}$$

- $\boldsymbol{B \times A}$

จากนิยาม

$$B \times A = \{(x, y) | x \in B \text{ และ } y \in A\}$$

จากนิยามของผลคูณคาร์ทีเซียนเราสามารถใช้แผนภาพเพื่อเขียนเชื่อมสมาชิกของทั้งสองSetได้ดังนี้



และเมื่อนำคู่อันดับที่ได้จากการเชื่อมกันของสมาชิกในSet B และSet A มาเขียนในรูปแบบSet จะได้ดังนี้

คลังความรู้.com
Exam & Material online

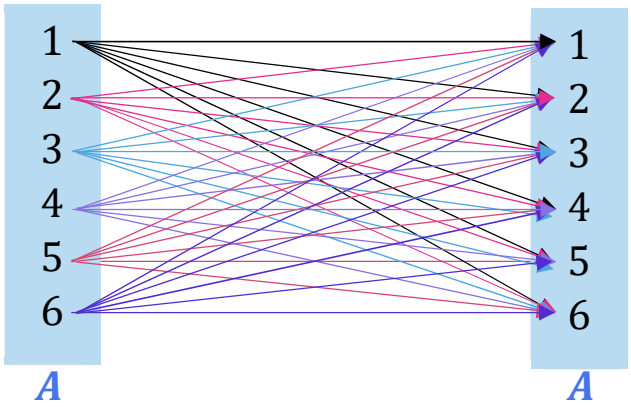
$$B \times A = \begin{Bmatrix} (a,1), & (a,2), & (a,3), & (a,4), & (a,5), & (a,6), \\ (b,1), & (b,2), & (b,3), & (b,4), & (b,5), & (b,6) \end{Bmatrix}$$

- $\boldsymbol{A \times A}$

จากนิยาม

$$A \times A = \{(x, y) | x \in A \text{ และ } y \in A\}$$

จากนิยามของผลคูณคาร์ทีเซียนเราสามารถใช้แผนภาพเพื่อเขียนเชื่อมสมาชิกของทั้งสองSetได้ดังนี้



และเมื่อนำคู่อันดับที่ได้จากการเชื่อมกันของสมาชิกในSet B และSet A มาเขียนในรูปแบบSet จะได้ดังนี้

$$A \times A$$
$$= \begin{Bmatrix} (1,1), & (2,1), & (3,1), & (4,1), & (5,1), & (6,1), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6), \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6) \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{Bmatrix}$$

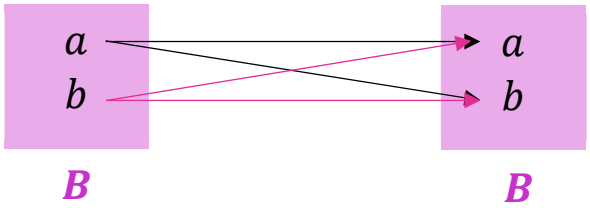
คลังความรู้ .com
Exam & Material online

- $\boldsymbol{B \times B}$

จากนิยาม

$$B \times B = \{(x, y) | x \in B \text{ และ } y \in B\}$$

จากนิยามของผลคูณคาร์ทีเซียนเราสามารถใช้แผนภาพเพื่อเขียนเชื่อมสมาชิกของทั้งสองSetได้ดังนี้



และเมื่อนำคู่อันดับที่ได้จากการเชื่อมกันของสมาชิกในSet B และSet A มาเขียนในรูปแบบSet จะได้ดังนี้

$$B \times B = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$$

- $\boldsymbol{A \times B \times A}$

สำหรับผลคูณคาร์ทีเซียนในลักษณะที่เกินกว่า 2 เซตขึ้นไปนั้น เราสามารถหาได้โดยค่อยๆคูรไปทีละคู่จากซ้ายไปขวา ซึ่งคู่อันดับที่ออกมาในคราวนี้จะไม่ใช้ 2 ตัวแต่จะมากกว่านั้น จากนิยามเราสามารถปรับเปลี่ยนได้เป็นดังนี้

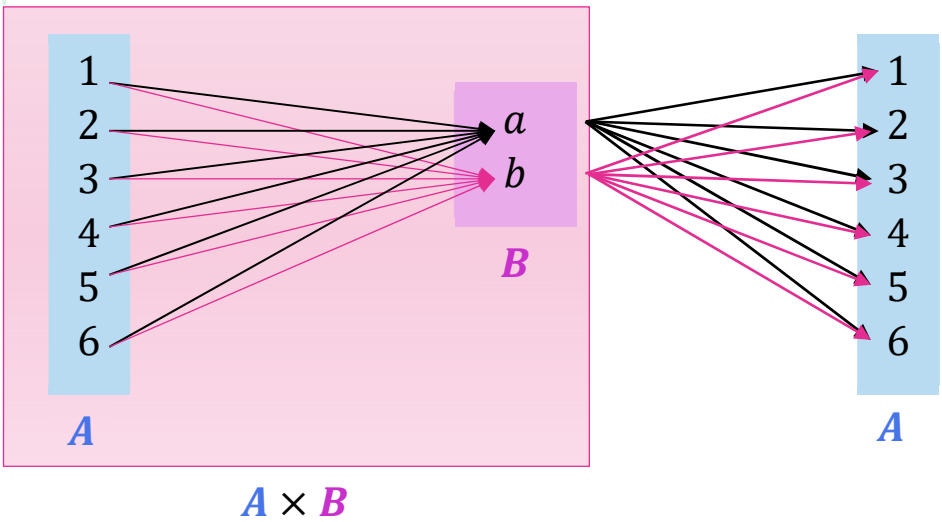
$$A \times B \times A = \{(x,y,z) | x \in A, y \in B \text{ และ } z \in A\}$$

โดยเราสามารถเขียนรูปแบบการหาได้เป็น

$$\boldsymbol{A \times B \times A = (A \times B) \times A}$$

นั่นคือ เราจะทำการหา $(\boldsymbol{A \times B})$ ก่อน หลังจากนั้นคำตอบคู่อันดับที่ได้ไปคูณกับ$\boldsymbol{A}$ อีกครั้ง เราจะได้ว่า

คลังความรู้.com
Exam & Material online



และเมื่อนำคู่อันดับที่ได้จากการเชื่อมกันของสมาชิกใน*Set B* และ*Set A* มาเขียนในรูปแบบ*Set* จะได้ดังนี้

$$A \times B \times A = \left\{ \begin{matrix} (1,a,1), & (1,a,2), & (1,a,3), & (1,a,4), & (1,a,5) & (1,a,6), \\ (2,a,1), & (2,a,2), & (2,a,3) & (2,a,4), & (2,a,5), & (2,a,6) \\ (3,a,1), & (3,a,2), & (3,a,3), & (3,a,4), & (3,a,5), & (3,a,6), \\ (4,a,1), & (4,a,2), & (4,a,3), & (4,a,4), & (4,a,5), & (4,a,6), \\ (5,a,1) & (5,a,2), & (5,a,3), & (5,a,4), & (5,a,5), & (5,a,6), \\ (6,a,1) & (6,a,2), & (6,a,3), & (6,a,4), & (6,a,5), & (6,a,6), \\ (1,b,1), & (1,b,2), & (1,b,3), & (1,b,4), & (1,b,5), & (1,b,6), \\ (2,b,1), & (2,b,2), & (2,b,3), & (2,b,4), & (2,b,5), & (2,b,6), \\ (3,b,1), & (3,b,2), & (3,b,3), & (3,b,4), & (3,b,5), & (3,b,6), \\ (4,b,1), & (4,b,2), & (4,b,3), & (4,b,4), & (4,b,5), & (4,b,6), \\ (5,b,1), & (5,b,2), & (5,b,3), & (5,b,4), & (5,b,5), & (5,b,6), \\ (6,b,1), & (6,b,2), & (6,b,3), & (6,b,4), & (6,b,5), & (6,b,6) \end{matrix} \right\}$$

คลังความรู้.com
Exam & Material online

Augustus De Morgan

27/6/1806-18/3/1871 อายุ 64 ปี

นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษที่มีผลงานสำคัญเกี่ยวกับความสัมพันธ์ (Relation) ระหว่างสมการและการแยกแยะตัวแปร ในปี 1849 เขาเขียนหนังสือเรื่อง "Formal Logic" ซึ่งได้รับการยกย่องว่าเป็นหนังสือที่สำคัญในการพัฒนาการคิดเชิงตรรกะ ในหนังสือนี้เขาได้กล่าวถึงแนวคิดเกี่ยวกับสัมพันธ์ที่เป็นหลักในการสร้างโครงสร้างต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะการใช้ความสัมพันธ์ในการแยกแยะตัวแปร และได้รับการยกย่องว่าเป็นแนวคิดที่สำคัญสำหรับพัฒนาคณิตศาสตร์ทฤษฎีในศตวรรษที่ 19 และ 20

RELATION: ความสัมพันธ์

"Relation" หรือ "ความสัมพันธ์" ถ้าหากเราอิงจากนิยามจากหนังสือคณิตสาตร์หลายๆเล่มจะกล่าวในทำนองว่า **"เป็นSetของคู่อันดับใดๆ โดยที่คู่อันดับที่อยู่ในSetเดียวกันหรือ 2 Setหรือมากกว่านั้นจะมีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกันภายใต้รูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง"** ซึ่งหลายคนอาจจะไม่ค่อยเข้าใจความหมายที่ถูกนิยามไว้มากสักเท่าไร

ในที่นี้จะขอในคำนิยามแบบง่ายๆของความสัมพันธ์ไว้ดังนี้ **"ความสัมพันธ์เปรียบสเมือนเป็นส่วนเติมเต็มของผลคูณคาร์ทีเซียนที่ทำให้การเชื่อมสมาชิกจากกระบวนการการคูณคาร์ทีเซียนมีเงื่อนไขในการเชื่อมกันมากขึ้น"** หรือพูดภาษาชาวบ้านคือการเชื่อมกันของสมาชิกระหว่างSet เริ่มเรื่องมากขึ้นและมีข้อจำกัดในการเชื่อมกันนั่นเองครับ ความสัมพันธ์ในการเชื่อมสมาชิกนั้นมีหลากหลายมากมายแล้วแต่ว่าจะกำหนดเป็นอะไรยังไง ลองพิจารณาทีละขั้นตอนด้านล่างเพื่อให้เข้าใจความหมายของความสัมพันธ์มากขึ้นครับ

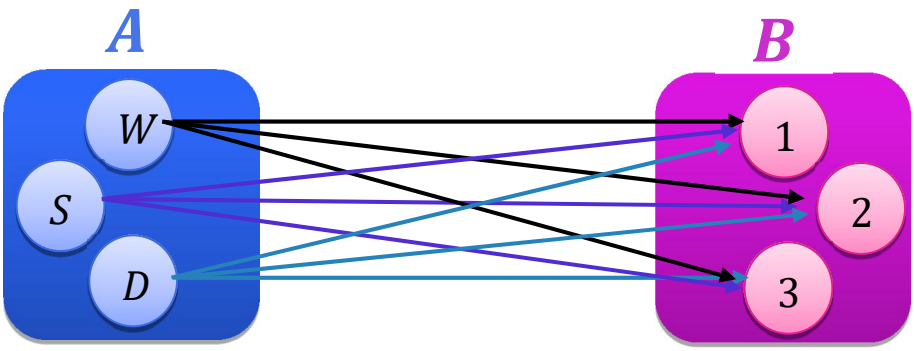
สมมุติกำหนดให้

$\boldsymbol{A} = \{W, S, D\}$

$\boldsymbol{B} = \{1,2,3\}$

ศูนย์รวมความรู้.com
Exam & Material online

ผลคูณคาร์ทีเซียนของ $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ จะได้



รูปภาพที่ 5 ผลคูณคาร์ทีเซียนของ $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \left\{ \begin{matrix} (W,1),(W,2),(W,3), \\ (S,1),(S,2),(S,3),, \\ (D,1),(D,2),(D,3) \end{matrix} \right\}$$